

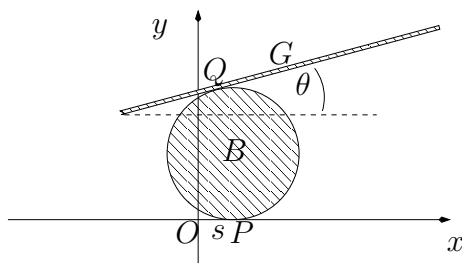
# Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

12 Settembre 2013

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

## Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico descritto in figura, composto da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  che può rotolare senza strisciare sull'asse  $Ox$ . Sul disco può a sua volta rotolare senza strisciare un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Si usino come coordinate l'ascissa  $s$  del baricentro

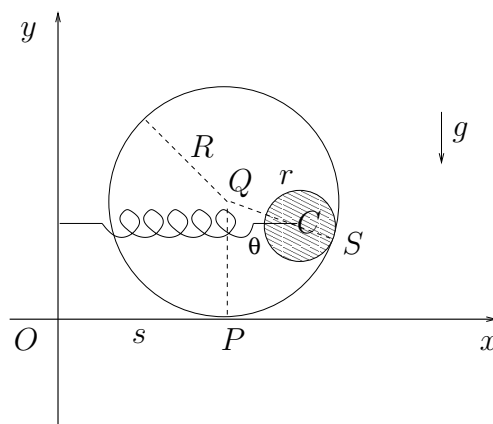


$B$  del disco e l'angolo  $\theta$  tra l'asta e la direzione orizzontale e si assuma che per  $s = 0, \theta = 0$  il punto di contatto  $Q$  tra asta e disco coincida col baricentro  $G$  dell'asta. Determinare il centro istantaneo di rotazione dell'asta.

## Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Un anello omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  rotola senza strisciare sull'asse  $Ox$ . All'interno dell'anello può rotolare senza strisciare un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $r$ , con  $2r < R$ . Sia  $P$  il punto di contatto dell'anello con l'asse delle ascisse,  $Q$  il centro dell'anello,  $S$  il punto di contatto del disco con l'anello e  $C$  il centro del disco. Una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla collega il centro del disco  $C$  con l'asse delle ordinate ed è vincolata a rimanere orizzontale. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione  $g$ .

Si usino come variabili l'ascissa  $s$  del punto  $P$  e l'angolo  $\theta \in S^1$ , crescente in senso antiorario, tra il segmento  $QS$  e la direzione verticale (vedi figura).



- Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange.
- Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
- Supponendo  $g/(R - r) = k/m$ , scrivere l'equazione secolare per il calcolo delle frequenze proprie di oscillazione attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

### Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente. Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è vincolato a muoversi sulla superficie di equazione

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Sul punto agisce anche la forza di gravità, di accelerazione  $g$ .

- Scrivere la hamiltoniana del sistema.
- Mostrare che in coordinate opportune l'equazione di Hamilton-Jacobi è separabile.