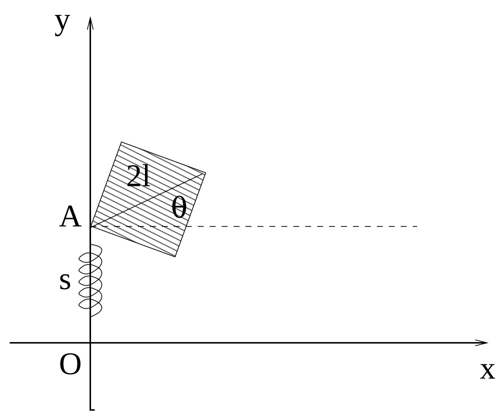
Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
11 Giugno 2013

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy, con l'asse Oy verticale ascendente. Una lamina quadrata omogenea di massa m e diagonale 2ℓ ha un vertice A vincolato a scorrere sull'asse Oy e collegato all'origine O da una molla di costante elastica k. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Si utilizzino come coordinate lagrangiane l'ordinata s del punto A e l'angolo θ che la diagonale della lamina passante per A forma con la direzione dell'asse Ox (vedi figura).

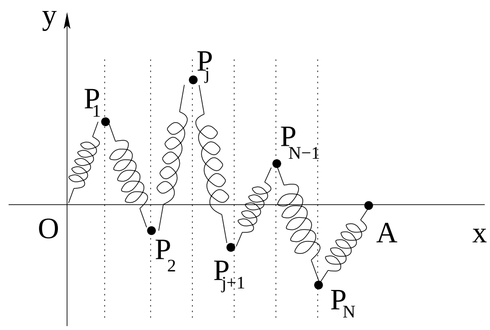


a) Calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione della lamina.

b) Scrivere le equazioni del moto utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy, con l'asse Oy verticale ascendente. Si considerino N punti materiali P_j $(j = 1 \dots N)$ di ugual massa m, che si muovono rispettivamente sulle rette verticali $x = j$. Ciascuno dei punti $P_j, j = 2 \dots N-1$ è collegato al precedente e al successivo da una molla di costante elastica k. Inoltre i punti P_1 e P_N sono collegati da una molla di costante k ai punti O e A, di coordinate $(x, y) = (0, 0)$, $(N+1, 0)$ rispettivamente (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Utilizzare come coordinate lagrangiane le ordinate y_j $(j = 1 \dots N)$ dei punti P_j.



i) Scrivere la lagrangiana del sistema meccanico.

ii) Dimostrare che esiste un'unica configurazione di equilibrio $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^N$ e studiarne la stabilità.

iii) (*facoltativo*) Trovare le coordinate della configurazione di equilibrio del punto ii).

Terzo Esercizio

a) Generalizzare il risultato sulla definizione di trasformazioni canoniche univalenti (indipendenti dal tempo) tramite una funzione generatrice al caso di trasformazioni simplettiche con valenza $\alpha \neq 0$.

b) Si consideri l'insieme

$$\mathcal{D} = \{(p_1, p_2, q_1, q_2) : p_1 + q_1 > 0, p_2 + q_2 > 0\} \ .$$

Completare le relazioni

$$P_1 = (p_1 + q_1)^2; \qquad P_2 = (p_1 + q_1)^2 + (p_2 + q_2)^2$$

ad una trasformazione simplettica

$$\mathcal{D} \ni (p_1, p_2, q_1, q_2) \to (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$$

con valenza -1.