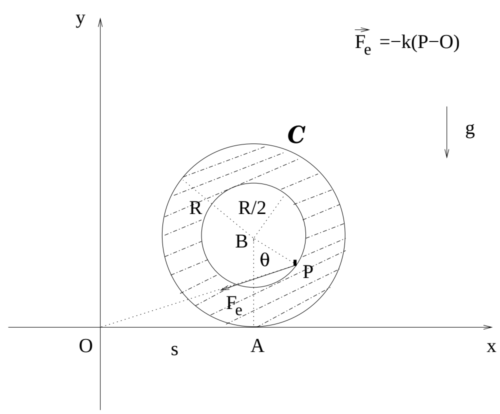
Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
11 Febbraio 2013

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale Oxy, una corona circolare $\mathcal{C}$, di centro B, massa M, raggio esterno R e raggio interno $R/2$, rotola senza strisciare sull'asse Ox. Un punto P di massa m è vincolato (vincolo liscio) a muoversi sulla circonferenza interna ed è soggetto ad una forza elastica $\vec{F}_e = -k\,(P-O)$. Sul sistema agisce la forza di gravità. Si utilizzino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto A e l'angolo θ, crescente in senso antiorario, che il segmento BP forma con il segmento BA (vedi figura).



a) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Lagrange.

b) Ritrovare le equazioni di moto del punto a) utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ in $\mathbb{R}^3$ e si consideri il moto di un punto materiale P di massa m sulla superficie di rotazione Σ descritta da

$$x = f(z)\cos\phi, \qquad y = f(z)\sin\phi, \qquad z = z,$$

con

$$f(z) = \frac{1}{2}[7\cos z - 3(1+\cos 2z)], \qquad z \in (-\pi/2, \pi/2)$$

e $\phi \in S^1$. Nota che i 2 punti $P_\pm = (0, 0, \pm\pi/2)$ non fanno parte di Σ.

Assumiamo che Σ sia liscia, che sul punto P agisca solamente la reazione vincolare sviluppata dalla superficie e che la componente della velocità lagrangiana iniziale $\dot{\phi}_0$ sia non nulla.

i) Scrivere la lagrangiana del problema e mostrare che il moto di P resta in Σ per tutti i tempi.

ii) Utilizzando la variabile ciclica, scrivere la lagrangiana ridotta col metodo di Routh.

iii) Descrivere le orbite nello spazio delle fasi ridotto, discutendo l'esistenza di punti di equilibrio e la loro stabilità.

iv) Descrivere le traiettorie possibili sulla superficie Σ al variare delle condizioni iniziali $(z_0, \dot{z}_0, \phi_0, \dot{\phi}_0)$.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano in $\mathbb{R}^{2n}$, con funzione di Hamilton

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{j=1}^{n} V(q_{j+1} - q_j)$$

in cui $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $V \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e si assume $q_{n+1} = q_1$.

(i) Scrivere la funzione di Lagrange L corrispondente ad H tramite la trasformata di Legendre.

(ii) Trovare un gruppo a un parametro di diffeomorfismi $\boldsymbol{\phi}_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, che lasci invariata L e determinare l'integrale primo del sistema lagrangiano definito da L corrispondente a questa simmetria.

(iii) Trovare un cambiamento di coordinate

$$\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{q} \mapsto \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})$$

tale che la prima componente di $\boldsymbol{Q}$ sia ciclica in $L\big(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{Q}), \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{-1}}{\partial \boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q})\dot{\boldsymbol{Q}}\big)$.

(iv) Completare il cambiamento di coordinate $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})$ ad una trasformazione canonica

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \mapsto (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

e scrivere l'espressione della funzione di Hamilton

$$K = H \circ \boldsymbol{\Psi}^{-1}$$

nelle nuove variabili.