

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

10 Gennaio 2013

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

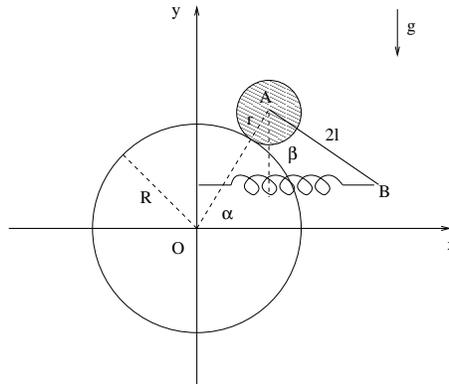
Primo Esercizio

Un disco omogeneo di massa m e raggio r è vincolato a rotolare senza strisciare all'esterno di una guida circolare di raggio R posta in un piano verticale con centro nell'origine O di un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy . Nel centro A del disco è incernierata un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2l$ libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano del moto e passante per A . L'altro estremo dell'asta, indicato con B , è richiamato verso l'asse Oy da una molla, vincolata a rimanere orizzontale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Si scelgano come coordinate lagrangiane l'angolo α che OA forma con l'asse delle ascisse, e l'angolo β che AB forma con la direzione verticale (vedi figura).

- a) Scrivere la lagrangiana del sistema.

Si ponga $(R + r) = 2l$.

- b) Mostrare che non esistono equilibri del tipo $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \pi/2)$ e $(\alpha, \beta) = (0, \beta_0)$, con $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$.
- c) Si studino gli equilibri della forma $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, 0)$ e la loro stabilità.
- d) Posto $\mu = \frac{mg}{kl} = 1$, e facendo riferimento al punto precedente, si scriva l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.



Secondo Esercizio

Consideriamo una hamiltoniana $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, funzione delle variabili reali $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, con $n > 1$, che sia invariante per traslazioni del tipo

$$q_j \mapsto q_j + \alpha, \quad p_j \mapsto p_j, \quad j = 1 \dots n .$$

i) Estendere le relazioni

$$\begin{aligned} Q_j &= q_{j+1} - q_j, & j &\leq n-1 \\ Q_n &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k q_k, \end{aligned}$$

con $m = \sum_{k=1}^n m_k$, $m_k > 0$, $k = 1 \dots n$, ad una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

omogenea nelle variabili p_j .

ii) Mostrare che

$$P_n = \sum_{j=1}^n p_j .$$

iii) Mostrare che la funzione di Hamilton

$$K = H \circ \Psi^{-1}$$

è indipendente da Q_n .