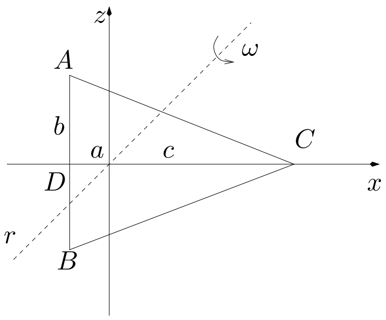
Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
12 Giugno 2012
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento inerziale $Oxyz$, con versori degli assi $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. Si consideri un triangolo isoscele omogeneo orientato come in figura, di massa m, base b e altezza h, che ruota attorno all'asse r definito da $\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_3$, con velocità angolare costante $\vec{\omega}$.



L'asse r divide l'asse di simmetria CD del triangolo in due parti, di lunghezza a, c rispettivamente ($h = a + c$). Dimostrare che, scelti a, b con $b^2 > 12a^2$, è possibile determinare c in modo da ottenere la rotazione uniforme del triangolo con momento delle forze esterne nullo rispetto al polo O.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico composto da 3 punti materiali P_1, P_2, P_3 di uguale massa m che possono scorrere su 3 semirette uscenti da O, di equazioni parametriche

$$
\begin{aligned}
&x_1 = s_1\,, y_1 = 0\,, z_1 = -s_1\,,\\
&x_2 = -\frac{s_2}{2}\,, y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}s_2\,, z_2 = -s_2\,,\\
&x_3 = -\frac{s_3}{2}\,, y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}s_3\,, z_3 = -s_3\,,
\end{aligned}
$$

con $s_1, s_2, s_3 > 0$. I punti P_j sono collegati tra loro da molle di ugual costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Usando come coordinate i parametri s_1, s_2, s_3,

i) scrivere la lagrangiana del sistema;

ii) dimostrare che c'è un unico punto di equilibrio stabile;

iii) scrivere l'equazione per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile e dimostrare che una frequenza è $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

iv) trovare il modo normale associato alla frequenza $\bar{\omega}$ e descrivere geometricamente il moto ad esso associato.

Terzo Esercizio

Si consideri il moto piano di un corpo puntiforme di massa m nel campo di forze generato da due centri fissi di attrazione O_1, O_2 posti a distanza $2d$, $d > 0$ l'uno dall'altro.

Introduciamo in tale piano il sistema di riferimento Oxy, con asse Ox diretto lungo la retta congiungente i due centri e con l'origine O posto a distanza d da ciascuno di essi.

Le forze $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ sviluppate da ciascuno dei centri sono date da

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{(x-d, y)}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}}\,, \qquad \mathbf{F}_2 = -\frac{(x+d, y)}{[(x+d)^2 + y^2]^{3/2}}\ .$$

Mostrare che usando le variabili ellittiche (ξ, η), definite da

$$x = \cosh\xi\cos\eta\,, \qquad y = \sinh\xi\sin\eta\,,$$

l'equazione di Hamilton-Jacobi per il sistema si scompone in due equazioni differenziali ordinarie.