

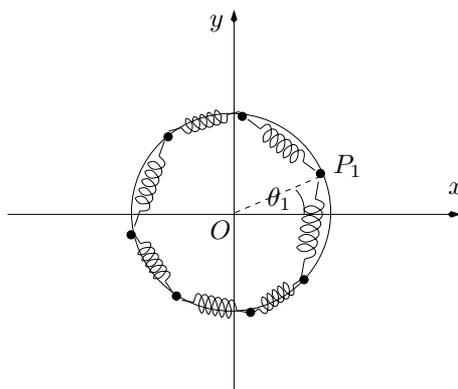
Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica

10 Gennaio 2012

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Si consideri il sistema meccanico descritto in figura, composto da N punti materiali $P_1 \dots P_N$, di ugual massa m . I punti P_j possono scorrere su una circonferenza di raggio R centrata in O . Inoltre ogni punto $P_j, j = 1 \dots N$, è collegato sia a P_{j-1} che a P_{j+1} da molle uguali di costante elastica k (abbiamo assunto $P_0 = P_N, P_{N+1} = P_1$). Supponiamo che la guida sia liscia e che i punti materiali possano attraversarsi a vicenda. Si usino come coordinate lagrangiane gli angoli $\theta_j, j = 1 \dots N$ che i segmenti OP_j formano con l'asse Ox .



- (i) Scrivere la lagrangiana L del sistema.
- (ii) Determinare un'azione $\phi_\alpha(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$, del gruppo \mathbb{R} sul toro \mathbb{T}^N tale che L sia invariante per l'azione indotta su $T\mathbb{T}^N$, scrivere il generatore infinitesimo $\xi(\boldsymbol{\theta})$ dell'azione $\phi_\alpha(\boldsymbol{\theta})$ e trovare il corrispondente integrale primo del sistema lagrangiano associato ad L .
- (iii) Trovare una trasformazione di coordinate $(\theta_1, \dots, \theta_N) = \boldsymbol{\theta} \xrightarrow{\Psi} \boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_N)$ per cui la lagrangiana L , scritta nelle nuove coordinate, abbia una variabile ciclica.¹
- (iv) Scrivere la lagrangiana ridotta con il metodo di Routh.
- (v) Scrivere le equazioni degli equilibri nello spazio delle fasi ridotto.
- (vi) Verificare che, se $N > 4$, le configurazioni con $\theta_{j+1} - \theta_j = \frac{2\pi}{N}, j = 1 \dots N$ corrispondono ad un equilibrio stabile nello spazio delle fasi ridotto.

¹Suggerimento: (1) scrivere il flusso integrale $\Phi_t(\boldsymbol{\theta})$ di $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \xi(\boldsymbol{\theta})$; (2) considerare la trasformazione $\Psi(\boldsymbol{\theta}) = \Phi_{\theta_1}(0, -\theta_2, \dots, -\theta_N)$ e scrivere il campo vettoriale ξ nelle variabili $\boldsymbol{\Theta} = \Psi(\boldsymbol{\theta})$; (3) osservare che la variabile Θ_1 è ciclica nella lagrangiana espressa in funzione di $\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}$.

Secondo Esercizio

Si determini la soluzione del sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n [(1 + q_h^2)^2 p_h^2 + (\arctan q_h)^2], \quad p, q \in \mathbb{R}^n$$

con condizioni iniziali

$$q_h(0) = 1, \quad p_h(0) = 0, \quad h = 1 \dots n .$$