

## Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

10 Febbraio 2012

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

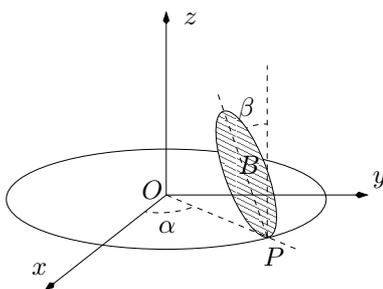
### Primo Esercizio

Si fissi un riferimento  $Oxyz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico costituito da una sfera piena omogenea di massa  $m$  e raggio  $r$  che può rotolare senza strisciare sul piano  $Oxy$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ .

1. Usando le equazioni cardinali della dinamica descrivere il moto del baricentro  $B$  della sfera e la reazione vincolare  $\vec{\Phi}$  esercitata sul punto della sfera  $P$  a contatto col piano  $Oxy$ .
2. Si risponda alla domanda del punto precedente assumendo stavolta che l'asse  $Oz$  sia inclinato di un angolo  $\alpha \in (0, \pi/2)$  rispetto alla verticale e che  $Oy$  abbia la direzione di massima pendenza.

### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura composto da un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $r$  che rotola senza strisciare su una guida circolare di raggio  $R = 2r$  centrata in  $O$  e giacente nel piano  $Oxy$ . Il disco si può inclinare durante il suo moto, ma la retta tangente alla guida nel punto di contatto col disco resta sempre nel piano del disco. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ .



Chiamiamo  $B$  il baricentro del disco e  $P$  il punto di contatto fra disco e guida. Usando come coordinate l'angolo  $\alpha$  che il segmento  $OP$  forma con l'asse  $Ox$  e l'angolo  $\beta$  che il segmento  $PB$  forma con la direzione verticale,

- (i) scrivere la velocità angolare del disco;
- (ii) scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange.

### Terzo Esercizio

Si consideri nel piano  $Oxy$  il moto di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  soggetto ad una forza centrale con centro in  $O$  ed energia potenziale  $V(x, y) = -\frac{k}{\rho^2}$  dove  $k > 0$  e  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  è la distanza di  $P$  dal centro di forza.

1. Scrivere la funzione di Hamilton del sistema.
2. Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione caratteristica  $W$  e calcolare un integrale completo di tale equazione.