

## Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

19 Luglio 2011

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

### Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ , con asse  $Oz$  verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico formato da una lamina quadrata omogenea, di massa  $m$  e lato  $\ell$ . Il lato  $AB$  della lamina è vincolato a scivolare su una guida rettilinea  $r$  che può ruotare attorno all'origine  $O$  mantenendosi sempre nel piano  $Oxy$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ , e la forza di una molla di costante elastica  $k$  che congiunge il punto  $A$  della lamina all'origine  $O$ .

Usando come coordinate l'ascissa  $s$  del punto medio di  $AB$  su  $r$ , l'angolo  $\phi$  che  $r$  forma con l'asse  $Ox$  e l'angolo  $\psi$  che il piano della lamina forma con il piano  $Oxy$

- i) si determini l'asse istantaneo di rotazione della lamina;
- ii) si scriva la lagrangiana del sistema.

### Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente e si consideri un triangolo rettangolo  $ABC$ , con angolo retto in  $A$  e angolo  $\alpha$  in  $B$ , il cui lato  $AB$  scivola sull'asse  $Ox$  con legge oraria  $A(t) \equiv (s(t), 0)$ , dove  $s \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  è una funzione nota del tempo. Sul triangolo può rotolare senza strisciare un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$ . Sul disco agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa  $q$  del punto di contatto  $P$  tra disco e triangolo sul lato  $BC$  del triangolo

- i) scrivere la lagrangiana  $L$  del disco relativa al sistema di riferimento  $Oxz$  e la lagrangiana  $\mathcal{L}$  relativa a un sistema solidale al triangolo;
- ii) trovare una funzione  $F(q, t)$  tale che

$$L = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}F.$$

### Terzo Esercizio

Nel piano  $Oxy$  si consideri il sistema meccanico formato da  $n$  punti materiali  $P_1 \dots P_n$  di ugual massa  $m$ . Il punto  $P_i$  è vincolato a muoversi sulla retta  $x = i$ ,  $i = 1 \dots n$ . Inoltre ogni  $P_i$  è collegato ai punti  $P_{i-1}$  e  $P_{i+1}$  da due molle di costante elastica  $k$  (con  $P_0 \equiv (0, 0)$ ,  $P_{n+1} \equiv (n+1, 0)$ ). Si usino come coordinate i valori  $y_i$ ,  $i = 1 \dots n$  delle ordinate dei punti  $P_i$ .

- i) Scrivere energia cinetica e potenziale del sistema;
- ii) dimostrare che l'unica configurazione di equilibrio è  $(y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)$ ;
- iii) dimostrare che l'equilibrio trovato in ii) è stabile.