3.3 Trasformazioni canoniche

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ un aperto. In questa sezione caratterizzeremo le trasformazioni di coordinate $\mathbf{\Psi}$

$$U \ni \mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \stackrel{\mathbf{\Psi}}{\to} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}$$

che lasciano invariata la struttura delle equazioni di Hamilton. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto. È anche interessante considerare diffeomorfismi dipendenti dal tempo della forma

$$U \times I \ni (\mathbf{x}, t) = (\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \stackrel{\mathbf{\Psi}}{\to} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = (\mathbf{y}, t) \in \mathbf{\Psi}(U \times I)$$

e cercare anche fra questi le trasformazioni che lasciano invariate le equazioni di Hamilton.

Tratteremo i due casi separatamente.

3.3.1 Trasformazioni canoniche indipendenti dal tempo

Siano $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ un aperto ed $U \ni (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \stackrel{\mathbf{\Psi}}{\to} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbf{\Psi}(U)$ una trasformazione di coordinate di classe $C^2(U; \mathbb{R}^{2n})$.

Definizione 2. *La trasformazione* $\mathbf{\Psi}$ *si dice* **canonica** *se per ogni* $H \in C^2(U; \mathbb{R})$ *il campo vettoriale hamiltoniano* X_H *viene trasformato in un altro campo vettoriale hamiltoniano* X_K*, con* $K \in C^2(\mathbf{\Psi}(U); \mathbb{R})$*.*

Osservazione 4. Le funzioni di Hamilton della Definizione 2 possono anche dipendere esplicitamente dal tempo: infatti tale dipendenza qui gioca soltanto il ruolo di un parametro e non cambia i risultati. Al contrario, la dipendenza esplicita da t nella trasformazione $\mathbf{\Psi}$ produce differenze significative nella teoria, come vedremo nella Sezione 3.3.3.

Trasformazioni simplettiche

La trasformazione $\mathbf{\Psi}$ si dice **simplettica con valenza** $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se

$$\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}^T(\mathbf{x}) = \alpha \mathbb{J}\,, \qquad \forall \mathbf{x} \in U\ . \tag{3.10}$$

Esercizio 2. *Dimostrare che le trasformazioni simplettiche con valenza (non fissata a priori) formano un gruppo con il prodotto di composizione.*

Definizione 3. *Se la trasformazione* $\mathbf{\Psi}$ *è simplettica con valenza 1 si dice anche che essa è* **completamente canonica***.*

Dato un campo vettoriale $\mathbf{X} = \sum_{h=1}^{m} X_h \frac{\partial}{\partial x_h}$ definito su $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ed un diffeomorfismo $\mathbf{\Psi} : U \to \mathbb{R}^m, \mathbf{y} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{x})$, nelle coordinate $\mathbf{y}$ si ottiene un nuovo campo vettoriale:

$$\mathbf{Y} = \left(\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}\right) \circ \mathbf{\Psi}^{-1} = \sum_{h=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_k} X_k \right) \frac{\partial}{\partial x_h} \; .$$

Diamo di seguito alcune caratterizzazioni delle trasformazioni canoniche.

Proposizione 8. (caratterizzazione delle trasformazioni canoniche) *Sia* $\mathbf{\Psi} : U \to \mathbf{\Psi}(U)$ *una trasformazione di coordinate in* $\mathbb{R}^{2n}$. *Fissato* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) $\mathbf{\Psi}$ *è simplettica con valenza* α*;*

(2) *per ogni hamiltoniana* $H \in C^2(U;\mathbb{R})$ *il campo vettoriale* $\mathbf{X}_H$ *viene trasformato nel campo* $\mathbf{X}_K$ *con* $K = \alpha H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$*, cioè*

$$\left(\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}_H\right) \circ \mathbf{\Psi}^{-1} = \mathbf{X}_{\alpha H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}} \, , \qquad \forall H \in C^2(U;\mathbb{R}) \, ; \tag{3.11}$$

(3) *per ogni coppia di funzioni* $f, g \in C^2(U;\mathbb{R})$ *le parentesi di Poisson* $\{\cdot,\cdot\}_{\mathbf{x}}$, $\{\cdot,\cdot\}_{\mathbf{y}}$*, rispetto alle vecchie coordinate* $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ *e a quelle nuove* $\mathbf{y} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$*, soddisfano la relazione*

$$\{f, g\}_{\mathbf{x}} \circ \mathbf{\Psi}^{-1} = \alpha \{f \circ \mathbf{\Psi}^{-1}, g \circ \mathbf{\Psi}^{-1}\}_{\mathbf{y}}; \tag{3.12}$$

(4) *la forma differenziale*

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{dQ} - \alpha \mathbf{p} \cdot \mathbf{dq} \, , \tag{3.13}$$

dove $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ *e* $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$*, è chiusa.*

Dimostrazione. (1) $\Longleftrightarrow$ (2). Dalla relazione

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}(H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \circ \mathbf{\Psi}^{-1}\right) \frac{\partial \mathbf{\Psi}^{-1}}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-1}\right) \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$$

passando ai trasposti abbiamo che

$$X_{\alpha H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}} = \alpha \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{y}} (H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}) = \alpha \mathbb{J} \left(\left[\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-T} \nabla_{\mathbf{x}} H \right) \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$$

per cui

$$\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} X_H \circ \mathbf{\Psi}^{-1} - X_{\alpha H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \left[\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T - \alpha \mathbb{J} \right\} \left(\left[\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-T} \nabla_{\mathbf{x}} H \right) \circ \mathbf{\Psi}^{-1} \; .$$

(1) $\Longleftrightarrow$ (3). Dalla relazione

$$\nabla_{\mathbf{y}}(f \circ \mathbf{\Psi}^{-1}) = \left(\left[\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-T} \nabla_{\mathbf{x}} f \right) \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$$

e dalla relazione analoga per g si ottiene

$$\begin{aligned}
\left\{ f \circ \mathbf{\Psi}^{-1}, g \circ \mathbf{\Psi}^{-1} \right\}_{\mathbf{y}} &= \nabla_{\mathbf{y}}(f \circ \mathbf{\Psi}^{-1}) \cdot \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{y}}(g \circ \mathbf{\Psi}^{-1}) = \\
&= \left(\nabla_{\mathbf{x}} f \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} \mathbb{J} \left[\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-T} \nabla_{\mathbf{x}} g \right) \circ \mathbf{\Psi}^{-1} = \\
&= \left(\nabla_{\mathbf{x}} f \cdot (\alpha^{-1} \mathbb{J}) \nabla_{\mathbf{x}} g \right) \circ \mathbf{\Psi}^{-1} = \alpha^{-1} \{ f, g \}_{\mathbf{x}} \circ \mathbf{\Psi}^{-1} \ .
\end{aligned}$$

(1) $\Longleftrightarrow$ (4). Si può sviluppare l'espressione della forma differenziale (3.13) come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} \cdot \mathbf{dQ} - \alpha \mathbf{p} \cdot \mathbf{dq} &= \sum_{h=1}^{n} P_h dQ_h - \alpha p_h dq_h = \\
&= \sum_{h=1}^{n} P_h \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} dq_j \right) - \alpha \sum_{h=1}^{n} p_h dq_h = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} \right) dp_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} - \alpha p_j \right) dq_j \ .
\end{aligned}$$

Le condizioni di chiusura della forma differenziale sono allora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial p_i} \right) \ , \\
\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} - \alpha p_j \right) &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial p_i} \right) \ , \\
\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} - \alpha p_j \right) &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial q_i} - \alpha p_i \right) \ ,
\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial P_h}{\partial p_i} \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} - \frac{\partial P_h}{\partial p_j} \frac{\partial Q_h}{\partial p_i} \right) = 0 \, , \\
&\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial P_h}{\partial p_i} \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} - \frac{\partial P_h}{\partial q_j} \frac{\partial Q_h}{\partial p_i} \right) = \alpha \delta_{ij} \, , \qquad (3.14) \\
&\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial P_h}{\partial q_i} \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} - \frac{\partial P_h}{\partial q_j} \frac{\partial Q_h}{\partial q_i} \right) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Ma $\mathbf{\Psi}$ è simplettica con valenza α se e solo se $\left[\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} = \alpha \mathbb{J}$ e si ha

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}}\right)^T & \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T & \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} & -\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}}\right)^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}}\right)^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} & -\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}}\right)^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}}\right)^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \\ -\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} & -\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Da questo segue che le condizioni di chiusura (3.14) sono equivalenti al fatto che $\mathbf{\Psi}$ è simplettica con valenza α.

□

Osservazione 5. *Invece della proprietà (3.12), possiamo verificare la simpletticità con valenza α di una trasformazione $\mathbf{\Psi}$ tramite una proprietà più semplice, che riguarda sempre le parentesi di Poisson. Infatti una trasformazione $\mathbf{\Psi} : U \to \mathbb{R}^{2n}$ è simplettica con valenza α se e solo se le parentesi di Poisson fondamentali soddisfano le relazioni*

$$
\{P_i, P_j\} = 0\,, \quad \{Q_i, P_j\} = \alpha\delta_{i,j}\,, \quad \{Q_i, Q_j\} = 0\,, \quad i, j = 1 \dots n.
$$

In particolare $\mathbf{\Psi}$ è completamente canonica se e solo se preserva le parentesi di Poisson fondamentali.

Dimostrazione. Dalla (3.10), che definisce una trasformazione simplettica con valenza α, si ha

$$
\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} & \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} & -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} & -\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}}\right]^T & \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}}\right]^T \\ \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T & \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}}\right]^T - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}}\right]^T - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}}\right]^T & \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}}\right]^T - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}\right]^T \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}
$$

□

La proprietà (2) del Teorema 8 ci dice che se $\mathbf{\Psi}$ è simplettica con una qualche valenza α allora, per la (3.11), $\mathbf{\Psi}$ è canonica. È interessante osservare che vale anche il viceversa. Per dimostrarlo utilizzeremo il seguente

Lemma 1. *Siano $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto ed A una matrice di ordine n con coefficienti in $C^1(V;\mathbb{R})$. Se per ogni funzione $f \in C^2(V;\mathbb{R})$ esiste una funzione $g \in C^2(V;\mathbb{R})$ tale che A soddisfi la relazione*

$$A(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})$$

allora esiste una costante $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $A = \alpha I$.

Dimostrazione. Siccome $A(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ è un gradiente valgono le condizioni di chiusura

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(A\nabla_{\mathbf{x}} f)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(A\nabla_{\mathbf{x}} f)_j \,, \qquad \forall f \in C^2(V;\mathbb{R}),\ \forall i,j = 1\ldots n \,. \tag{3.15}$$

Facciamo alcune scelte particolari della funzione f. Se $f(\mathbf{x}) = x_j$ abbiamo

$$\nabla_{\mathbf{x}} x_j = \mathbf{e}_j \,, \qquad \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial A_{jj}}{\partial x_i} \,. \tag{3.16}$$

Se $f(\mathbf{x}) = x_j^2$ otteniamo

$$\nabla_{\mathbf{x}} x_j = 2x_j \mathbf{e}_j \,, \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}(2x_j A_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(2x_j A_{jj}) \,, \quad A_{ij} = \delta_{ij} A_{jj} \,,$$

quindi la matrice A è diagonale. Dalla (3.16) si ottiene allora che A_{jj} può dipendere solo da x_j. Dunque la (3.15), che per esteso si scrive

$$\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial A_{ih}}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_h} + A_{ih} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_h} \right) = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial A_{jh}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_h} + A_{jh} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_h} \right) \,,$$

si riduce a

$$A_{ii} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = A_{jj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \,.$$

Se infine consideriamo $f(\mathbf{x}) = x_i x_j$ si ottiene

$$A_{ii} = A_{jj} \,,$$

cioè $A = \alpha(\mathbf{x}) I$ per una qualche funzione $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ma ogni A_{ii} può dipendere solo da x_i, quindi $\alpha(\mathbf{x})$ è costante.

□

Proposizione 9. *Se $\mathbf{\Psi}$ è canonica, allora è simplettica con valenza α, per un qualche $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Dimostrazione. Se la $\mathbf{\Psi}$ è canonica allora posto $\mathbf{y} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ per ogni hamiltoniana H esiste una funzione K tale che

$$\mathbb{J}\nabla_{\mathbf{y}} K = \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{x}} H \circ \mathbf{\Psi}^{-1} \,. \tag{3.17}$$

Se pongo $\tilde{K} = H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$ ho che

$$\nabla_{\mathbf{x}} H = \left[\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \left(\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{K}\right) \circ \mathbf{\Psi}$$

e quindi, sostituendo nella (3.17) e moltiplicando per $-\mathbb{J}$,

$$\nabla_{\mathbf{y}} K = -\left(\mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \left[\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T\right) \circ \mathbf{\Psi}^{-1} \, \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{K}$$

quindi la matrice $-(\mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \mathbb{J} \left[\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T) \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$ manda ogni gradiente in un gradiente e per il Lemma 1 si ottiene

$$\nabla_{\mathbf{y}} K = \alpha \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{K} \,,$$

per un qualche $\alpha \in \mathbb{R}$, da cui segue che, a meno di una costante additiva, $K = \alpha H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$. Perchè la trasformazione $\mathbf{\Psi}$ sia un diffeomorfismo dobbiamo necessariamente avere $\alpha \neq 0$.

□

3.3.2 Costruzione di trasformazioni canoniche

Flusso integrale di un campo vettoriale hamiltoniano

Teorema 2. *Sia* $\mathbf{X}_H$*, con* $H \in C^2(U \times I; \mathbb{R})$*, un campo vettoriale hamiltoniano e sia* $\mathbf{\Phi} : U \times J \to \mathbb{R}^{2n}$ *il flusso integrale relativo, con* $I, J \subseteq \mathbb{R}$ *intervalli. Per ogni* $\bar{t} \in I$ *la mappa a tempo fissato* $\mathbf{\Phi}_{\bar{t}} : U \to \mathbb{R}^{2n}$*, data da* $\mathbf{\Phi}_{\bar{t}}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, \bar{t})$*, definisce una trasformazione completamente canonica.*

Dimostrazione. Consideriamo il flusso integrale $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$, soluzione generale di $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_H(\mathbf{x}, t)$ e scriviamo l'**equazione alle variazioni**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{X}_H(\mathbf{\Phi})) = \frac{\partial \mathbf{X}_H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{\Phi}) \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbb{J} H''(\mathbf{\Phi}) \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} \,.$$

Mostriamo che per ogni $\bar{t}$ vale

$$\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}_{\bar{t}}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbb{J} \frac{\partial \mathbf{\Phi}_{\bar{t}}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbb{J} \,.$$

Per $\bar{t} = 0$ è vero perchè $\frac{\partial \mathbf{\Phi}_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = I$. Inoltre

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbb{J}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right) &= \left[\mathbb{J}H''(\mathbf{\Phi})\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbb{J}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} + \left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbb{J}^2 H''(\mathbf{\Phi})\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} = \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \left(H''(\mathbf{\Phi})\mathbb{J}^T\mathbb{J} + \mathbb{J}^2 H''(\mathbf{\Phi})\right)\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \ .\end{aligned}$$

□

Corollario 2. *Possiamo costruire infinite trasformazioni canoniche tramite il flusso di un campo vettoriale hamiltoniano.*

Corollario 3. *(Teorema di Liouville) La mappa a tempo fissato data dal flusso di un campo vettoriale hamiltoniano conserva il volume nello spazio delle fasi.*

Teorema 3. *(Teorema del ritorno di Poincaré) Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ un aperto limitato e consideriamo una mappa $\mathbf{\Psi} : U \to U$ continua, bigettiva, che conservi il volume. Allora in ogni aperto di $V \subset U$ esiste un punto $\mathbf{x}$ tale che ritorna in V dopo un certo numero n di iterazioni di $\mathbf{\Psi}$.*

Dimostrazione. ... □

Funzioni generatrici di trasformazioni canoniche

Teorema 4. *Sia $S \in C^2(V \times W; \mathbb{R})$ una funzione tale che*

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \neq 0 \ . \tag{3.18}$$

Allora per ogni $(\mathbf{q}_0, \mathbf{P}_0) \in V \times W$ le equazioni

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \, , \qquad \mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}$$

definiscono implicitamente una trasformazione simplettica con valenza 1 $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ da un intorno di $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = (\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{P}_0), \mathbf{q}_0)$ ad un intorno di $(\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0) = (\mathbf{P}_0, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{P}_0))$.

Dimostrazione. La condizione di non degenerazione (3.18) ed il teorema delle funzioni implicite ci danno un diffeomorfismo locale nell'intorno di ogni punto $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$. La canonicità di tale trasformazione si dimostra con la condizione di Lie, infatti

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{dQ} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{dq} = d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{dP} - \mathbf{pdq} = d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} - S) \ .$$

□

3.3.3 Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo

Siano $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ un aperto semplicemente connesso ed $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Definizione 4. *Un diffeomorfismo* $\mathbf{\Psi}$ *di classe* C^2

$$U \times I \ni (\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \overset{\mathbf{\Psi}}{\to} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \overset{def}{=} (\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), t) \in \mathbb{R}^{2n+1} \tag{3.19}$$

è una trasformazione canonica se coniuga ogni campo vettoriale hamiltoniano ad un altro campo vettoriale hamiltoniano, cioè se

$$\forall H \in C^2(U \times I; \mathbb{R}) \qquad \exists K \in C^2(\mathbf{\Psi}(U \times I); \mathbb{R})$$

tale che il campo vettoriale hamiltoniano $\mathbf{X}_H$ *viene trasformato nel campo vettoriale hamiltoniano* $\mathbf{X}_K$*.*

Data una hamiltoniana H, il campo vettoriale $\mathbf{X}_H$ viene trasformato nel campo

$$\mathbf{\Psi}_* \mathbf{X}_H = \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}_H + \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} \right) \circ \mathbf{\Psi}^{-1} \ .$$

Definizione 5. *Dato un diffeomorfismo* $\mathbf{\Psi}$ *come in (3.19), definisco per ogni* $\bar{t} \in I$ *la corrispondente trasformazione a tempo bloccato* $\mathbf{\Phi}_{\bar{t}}$*:*

$$\mathbf{\Phi}_{\bar{t}}(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, \bar{t}) \ .$$

Proposizione 10. $\mathbf{\Psi} \in C^2(U \times I; \mathbb{R}^{2n+1})$ *è una trasformazione canonica se e solo se esiste* $\alpha \neq 0$ *tale che, per ogni* $\bar{t}$ *fissato,* $\mathbf{\Phi}_{\bar{t}}$ *è simplettica con valenza* α*.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{\Psi}$ è canonica, per ogni hamiltoniana $H \in C^2(U \times I; \mathbb{R})$ esiste una funzione $K \in C^2(\mathbf{\Psi}(U \times I); \mathbb{R})$ tale che $\mathbf{\Psi}_* \mathbf{X}_H = \mathbf{X}_K$. In particolare, scegliendo $H = 0$, troviamo una funzione K_0 tale che

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} \circ \mathbf{\Psi}^{-1} = \mathbf{X}_{K_0} \tag{3.20}$$

cioè, componendo con $\mathbf{\Psi}$,

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}_{K_0}(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t), t) \ .$$

cioè la mappa $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ è soluzione di un sistema di equazioni di Hamilton.[1]

[1] La $\mathbf{\Phi}$ non è necessariamente un flusso di fase, infatti non è detto che esista t_0 tale che $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{x}\,, \forall \mathbf{x}$. Facciamo un semplice esempio per il sistema dinamico (non hamiltoniano)

Dalla dimostrazione della Proposizione 9, sostituendo $K - K_0$ a K nella (3.17), segue che, se $\mathbf{\Psi}$ è canonica, le trasformazioni a tempo bloccato $\mathbf{\Phi}_{\bar{t}}$ sono simplettiche con una qualche valenza $\alpha(\bar{t})$. Infatti, se $\mathbf{\Psi}$ è canonica, per ogni hamiltoniana H esiste una hamiltoniana K tale che

$$\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{X}_H + \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t}\right] \circ \mathbf{\Psi}^{-1} = \mathbf{X}_K \,,$$

che implica

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{X}_H \circ \mathbf{\Psi}^{-1} = \mathbf{X}_K - \mathbf{X}_{K_0} = \mathbf{X}_{K-K_0} \,,$$

Dimostriamo che in realtà α non dipende da $\bar{t}$. Infatti la mappa $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ si può scrivere come composizione di una trasformazione canonica indipendente dal tempo con un flusso hamiltoniano: per ogni t_0 fissato si ha

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}_{t_0}^{-1}(\mathbf{y}), t\right)|_{\mathbf{y}=\mathbf{\Phi}_{t_0}(\mathbf{x})} \,,$$

dove $\mathbf{\Phi}_{t_0}^{-1}$ è l'inversa della trasformazione a tempo bloccato $\mathbf{\Phi}_{t_0}$. Per quanto detto prima la trasformazione $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{\Phi}_{t_0}(\mathbf{x})$ è simplettica con una valenza $\alpha(t_0)$. Inoltre dalla (3.20) si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}_{t_0}^{-1}(\mathbf{y}), t) = \mathbf{X}_{K_0}\left(\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}_{t_0}^{-1}(\mathbf{y}), t\right), t\right) \\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}_{t_0}^{-1}(\mathbf{y}), t_0) = \mathbf{y} \end{cases}$$

per ogni scelta di $\mathbf{y}$ e di t_0; quindi la mappa $(\mathbf{y}, t) \mapsto \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}_{t_0}^{-1}(\mathbf{y}), t\right)$ è un flusso hamiltoniano e quindi, per il Teorema 2, è simplettica univalente.

La dimostrazione che la valenza $\alpha(\bar{t})$ è indipendente da $\bar{t}$ si conclude osservando che la composizione di due trasformazioni simplettiche con valenza α_1, α_2 è ancora simplettica ed ha valenza $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ e usando l'arbitrarietà nella scelta di t_0.

Supponiamo adesso che per ogni tempo $\bar{t}$ la trasformazione a tempo bloccato $\mathbf{\Phi}_{\bar{t}}$ sia simplettica con valenza α indipendente da $\bar{t}$.

$\dot{x} = x$. La soluzione generale è $x(t) = Ae^t$, con $A \in \mathbb{R}$, e la mappa $\Phi(x, t) = xe^t$ è un flusso integrale. Data una funzione non costante $f(x)$, la mappa $\Psi(x, t) = f(x)\Phi(x, t) = xf(x)e^t$ risolve la stessa equazione differeniale, ma non è un flusso integrale, infatti se esistesse t_1 tale che $\Psi(x, t_1) = x, \ \forall x$, si avrebbe

$$\Psi(x, t_1) = x = \Phi(x, t_0) \quad \forall x$$

cioè

$$f(x)\Phi(x, t_1) = \Phi(x, t_0) \quad \forall x \,.$$

Sostituendo $\Phi(x, t) = xe^t$ si ottiene $f(x)e^{t_1} = 1, \forall x \neq 0$, che è assurdo.

Dalla (3.11) segue che per ogni $\bar{t}$ e per ogni H il campo vettoriale $\left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}_{\bar{t}}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{X}_H\right) \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$ è hamiltoniano con funzione di Hamilton $\alpha H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$.

Inoltre la matrice $\mathbb{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} \circ \mathbf{\Psi}^{-1}\right)$ è simmetrica, infatti

$$\mathbb{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} \circ \mathbf{\Psi}^{-1}\right) = \mathbb{J}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}\partial t} \circ \mathbf{\Psi}^{-1}\right)\frac{\partial \mathbf{\Phi}^{-1}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbb{J}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-1}\right) \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$$

e si ha

$$\begin{aligned}
&\mathbb{J}\frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-1} - \left(\mathbb{J}\frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-1}\right)^T = \\
&= \left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-T}\left(\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbb{J}\frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}\partial t} + \left[\frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}\partial t}\right]^T \mathbb{J}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right)\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \mathbb{J}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right)\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-1} = \left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-T}\frac{\partial}{\partial t}(\alpha\mathbb{J})\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-1} = \mathbf{0}\ .
\end{aligned}$$

Dalla Proposizione 7 segue che anche il campo vettoriale $\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$ è hamiltoniano, per una qualche funzione di Hamilton $K_0(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$, per cui il campo

$$\mathbf{\Psi}_*\mathbf{X}_H = \left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{X}_H + \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t}\right] \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$$

è hamiltoniano.

□

Definizione 6. *Una trasformazione di coordinate dipendente dal tempo si dice* **canonica con valenza** α *se tutte le corrispondenti trasformazioni a tempo bloccato sono simplettiche con valenza* α*.*

Siccome la valenza di una trasformazione canonica si può normalizzare a 1 semplicemente riparametrizzando il tempo, non è restrittivo assumere che una trasformazione canonica data sia univalente.

3.3.4 Spazio delle fasi esteso

Introduciamo lo spazio delle fasi esteso, con variabili $(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t)$.

Data una trasformazione di coordinate dipendente dal tempo $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \mapsto (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = \mathbf{\Psi}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, la posso completare ad una trasformazione $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$ sullo spazio esteso scegliendo una funzione $\mathcal{E}(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t)$ per cui la

$$(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) \overset{\widetilde{\mathbf{\Psi}}}{\mapsto} (\mathbf{P}, \mathcal{E}, \mathbf{Q}, t)$$

sia un diffeomorfismo sull'immagine. Assumendo che $\mathbf{\Psi}$ sia canonica, studiamo le condizioni che deve soddisfare $\mathcal{E}$ perchè $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$ sia canonica.

Innanzitutto osserviamo che, dato un sistema hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\,, \qquad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\,,$$

con funzione di Hamilton $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ dipendente dal tempo, si può scrivere facilmente un sistema hamiltoniano nello spazio delle fasi esteso che includa il precedente: basta scegliere come nuova funzione di Hamilton

$$\tilde{H}(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) \overset{def}{=} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) + e\ .$$

Infatti con tale hamiltoniana si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{q}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \dot{e} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = -\dfrac{\partial H}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{p}} = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{t} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial e} = 1 \end{cases} .$$

Abbiamo la seguente

Proposizione 11. *Sia $\mathbf{\Psi}$ una trasformazione canonica con valenza α. Allora $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$ è canonica con valenza α se e solo se $\mathcal{E}(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) = \alpha e - H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, con $H_0 = K_0 \circ \mathbf{\Psi}$ e K_0 un funzione di Hamilton per il campo vettoriale hamiltoniano $\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$.*

Dimostrazione. Nello spazio delle fasi esteso abbiamo una trasformazione indipendente dal tempo. Imponiamo che siano conservate le parentesi di Poisson $\{,\}_{\tilde{\mathbf{x}}}$, definite da

$$\{f, g\}_{\tilde{\mathbf{x}}} := \{f, g\}_{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial e} - \frac{\partial f}{\partial e}\frac{\partial g}{\partial t}\,,$$

con f, g funzioni di $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t)$.

Da $\{t, \mathcal{E}\}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \alpha$ si ottiene

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) = \alpha e + \mathcal{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$$

per una qualche funzione $\mathcal{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. Da $\{P_i, \mathcal{E}\}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \{Q_i, \mathcal{E}\}_{\tilde{\mathbf{x}}} = 0$ si ottiene

$$\{P_i, \mathcal{F}\}_{\mathbf{x}} + \frac{\partial P_i}{\partial t} = 0\,, \qquad \{Q_i, \mathcal{F}\}_{\mathbf{x}} + \frac{\partial Q_i}{\partial t} = 0\ . \tag{3.21}$$

Siccome $\mathbf{\Psi}$ è canonica, esiste una funzione $K_0(\mathbf{y}, t)$ (vedi la (3.20)) tale che

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} = \mathbf{X}_{K_0} \circ \mathbf{\Psi} = \mathbb{J}\nabla_{\mathbf{y}} K_0 \circ \mathbf{\Psi} \, ,$$

cioè

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = -\frac{\partial K_0}{\partial Q_i} \circ \mathbf{\Psi} \, , \qquad \frac{\partial Q_i}{\partial t} = \frac{\partial K_0}{\partial P_i} \circ \mathbf{\Psi} \; . \tag{3.22}$$

Dalle relazioni (3.21), (3.22) e (3.12)[2] si ottiene

$$\begin{aligned} \{P_i, \mathcal{F}\}_{\mathbf{x}} &= -\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{\partial K_0}{\partial Q_i} \circ \mathbf{\Psi} = -\{P_i, K_0\}_{\mathbf{y}} \circ \mathbf{\Psi} = -\{P_i, H_0\}_{\mathbf{x}} \, , \\ \{Q_i, \mathcal{F}\}_{\mathbf{x}} &= -\frac{\partial Q_i}{\partial t} = -\frac{\partial K_0}{\partial P_i} \circ \mathbf{\Psi} = -\{Q_i, K_0\}_{\mathbf{y}} \circ \mathbf{\Psi} = -\{Q_i, H_0\}_{\mathbf{x}} \; . \end{aligned}$$

Otteniamo dunque $\{H_0 + \mathcal{F}, Q_i\}_{\mathbf{x}} = \{H_0 + \mathcal{F}, P_i\}_{\mathbf{x}} = 0 \ \ \forall i$, che è equivalente a $\{K_0 + \mathcal{F} \circ \mathbf{\Psi}^{-1}, Q_i\}_{\mathbf{y}} = \{K_0 + \mathcal{F} \circ \mathbf{\Psi}^{-1}, P_i\}_{\mathbf{y}} = 0 \ \ \forall i$. Da questo segue che, a meno di costanti additive,

$$\mathcal{F} = -H_0 \; .$$

□

Indichiamo con il simbolo δ il **differenziale virtuale**, cioè il differenziale a tempo bloccato: ad esempio, se $G = G(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, si ha

$$\delta G(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = dG(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) - \frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) dt \; .$$

In virtù della Proposizione 10 e della proprietà (4) del Teorema 8 possiamo formulare la condizione di Lie anche nel modo seguente:

Proposizione 12. *(condizione di Lie) Condizione necessaria e sufficiente perchè $\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t), t)$ sia canonica con valenza α è che esistano una funzione $G = G(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ ed una costante $\alpha \neq 0$ tali che*

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{Q} - \alpha \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{q} = \delta G \; . \tag{3.23}$$

3.3.5 Funzioni generatrici dipendenti dal tempo

Proposizione 13. *Sia $S = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ una funzione delle vecchie coordinate e dei nuovi momenti tale che*

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{P}} \neq 0 \; .$$

[2] ricordiamo che $\mathbf{\Psi}_{\bar{t}}$ è simplettica univalente.

Allora le relazioni

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \quad , \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}$$

definiscono implicitamente una trasformazione canonica univalente dipendente dal tempo nell'intorno di ogni punto.

Dimostrazione. Introduco una trasformazione $(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) \to (\mathbf{P}, \mathcal{E}, \mathbf{Q}, t)$ nello spazio delle fasi esteso tramite la funzione generatrice

$$\tilde{S}(\mathbf{q}, t, \mathbf{P}, \mathcal{E}) = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + \mathcal{E}t$$

ed osservo che

$$\det \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial(\mathbf{P}, \mathcal{E})\partial(\mathbf{q}, t)} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{P} \partial \mathbf{q}} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ 0 \dots 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{P} \partial \mathbf{q}} \neq 0 \,,$$

per cui le relazioni

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \mathbf{q}}\,, \quad e = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}\,, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \mathbf{P}}\,, \quad t = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \mathcal{E}}\,,$$

definiscono implicitamente una trasformazione canonica indipendente dal tempo nello spazio delle fasi esteso. Vale infatti la condizione di Lie

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \cdot \mathbf{dQ} + \mathcal{E}dt - \mathbf{p} \cdot \mathbf{dq} - edt = \\ = \ & d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) + d(\mathcal{E}t) - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{dP} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{dq}) - td\mathcal{E} - edt = \\ = \ & d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \mathcal{E}t - \tilde{S}) = d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} - S) \ . \end{aligned}$$

Pongo $G(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) := \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} - S$ in cui si intende $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. Osservo che in realtà G è funzione solo di $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. Inoltre si ha

$$e = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{E}$$

Quindi la trasformazione $(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) \to (\mathbf{P}, \mathcal{E}, \mathbf{Q}, t)$ con $\mathcal{E} = e - \frac{\partial S}{\partial t}$ è canonica univalente e sono dunque preservate le parentesi di Poisson fondamentali $\{,\}_{\tilde{\mathbf{x}}}$. Siccome $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ non dipendono da e, sono preservate anche le parentesi di Poisson fondamentali $\{,\}_{\mathbf{x}}$, dunque $\forall \bar{t}$ la trasformazione a tempo bloccato $\mathbf{\Phi}_{\bar{t}}$ è simplettica univalente e, per la Proposizione 10, $\mathbf{\Psi}$ è canonica.

□

Corollario 4. *Se* $\mathbf{\Psi}$ *è una trasformazione canonica generata dalla funzione* $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$*, si ha che il campo vettoriale hamiltoniano* $\mathbf{X}_H$ *viene coniugato al campo hamiltoniano* $\mathbf{X}_K$*, con*

$$K \circ \mathbf{\Psi}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), t) \ .$$

Dimostrazione. Basta osservare che il campo vettoriale $\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$ è hamiltoniano per una qualche funzione di Hamilton K_0 e che per la Proposizione 11 si ha

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), t) = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = K_0 \circ \mathbf{\Psi}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$$

a meno di costanti additive.

□