

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO DI ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giovanni F. Gronchi

21 settembre 2010

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico discreto lineare in \mathbf{R}^4

$$X_{k+1} = A X_k \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- trovare i moltiplicatori di Lyapounov;
- determinare la stabilità del punto fisso;
- per ogni $\epsilon > 0$ trovare un'orbita $\{X_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ tale che $|X_k| \leq \epsilon$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.

Esercizio 2: Si consideri il sistema dinamico continuo definito da

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(y-1)(y-x-1) \\ \dot{y} = -x^2(y+x-1) \end{cases} .$$

- Verificare se si tratta di un sistema gradiente;
- determinare i punti di equilibrio del sistema;
- determinare le proprietà di stabilità del punto di equilibrio $(x, y) = (0, 1)$;
- dimostrare che l'insieme $D = \{x > 0\} \cap \{y + x - 1 < 0\}$ è positivamente invariante;
- dimostrare che ogni orbita contenuta nell'insieme D ammette un punto limite che si trova sulla retta $x = 0$.

Esercizio 3:

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi su una curva liscia di equazione $y = (1 + x^2)e^x$. Sul punto agiscono la forza di gravità $-mg\hat{e}_y$ ed una forza costante $C\hat{e}_x$, $C > 0$, diretta lungo l'asse Ox . Utilizzando x come coordinata lagrangiana

- 1) scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange;
- 2) determinare i punti di equilibrio in funzione dei parametri m, g, C e studiarne la stabilità;
- 3) fare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano con coordinate (x, \dot{x}) nei casi qualitativamente diversi (non degeneri);
- 4) (*facoltativo*) tracciare il diagramma di biforcazione delle soluzioni.