

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO DI ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giovanni F. Gronchi

15 Luglio 2010

**Esercizio 1:** Dato il sistema dinamico discreto lineare

$$X_{k+1} = A X_k \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 5/2 \\ -3/2 & 2 & 3/2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- trovare la soluzione generale;
- determinare il bacino di attrazione dell'origine.

**Esercizio 2:** Si consideri il sistema dinamico continuo definito da

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha^2 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2(1 - xy) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbf{R} .$$

- Dimostrare che è un sistema gradiente e trovare una funzione potenziale;
- determinare i punti di equilibrio del sistema in funzione di  $\alpha$ ;
- nel caso  $\alpha = 2$  determinare le proprietà di stabilità degli equilibri;
- sempre con  $\alpha = 2$ , dimostrare che le due componenti connesse dell'insieme

$$\{xy > 1\} \cap \{x^2 + y^2 < \alpha^2\}$$

sono contenute una nel bacino di attrazione di un pozzo e l'altra nel bacino di repulsione di una sorgente.

**Esercizio 3:** Si completi la relazione

$$w = pe^q + q^2$$

ad una trasformazione canonica

$$(p, q) \xrightarrow{\Phi} (w, z)$$

e si trovi una funzione generatrice della forma  $F(q, w)$ . Si utilizzi poi la trasformazione  $\Phi$  per trovare la soluzione generale del sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p, q) = p + q^2 e^{-q}$$

e condizioni iniziali  $(p_0, q_0)$ .