

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO DI ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

11 Febbraio 2010

Esercizio 1: Si consideri il sistema newtoniano definito da

$$\ddot{x} = f(x), \quad \text{con } f \in C^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R}) .$$

Lo si discretizzi con il metodo della mappa standard, utilizzando la variabile $y_k = x_k - x_{k-1}$. Sia $(x, y) = (\bar{x}, 0)$ un punto fisso della mappa e si consideri l'energia potenziale

$$V(x) = - \int_{\bar{x}}^x f(z) dz .$$

Determinare le condizioni necessarie e sufficienti sulla scelta del passo h perchè $(x, y) = (\bar{x}, 0)$ sia un punto iperbolico nei seguenti casi:

- a) \bar{x} è un massimo non degenero di $V(x)$;
- b) \bar{x} è un minimo non degenero di $V(x)$.

Esercizio 2: Si studi il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - r^2)(r^2 - 4)\frac{x}{r} - \frac{x^2 y}{r^2} \\ \dot{y} = (1 - r^2)(r^2 - 4)\frac{y}{r} + \frac{x^3}{r^2} \end{cases}$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. In particolare:

- a) trovare tutti i punti di equilibrio, le rette e i cerchi invarianti;
- b) utilizzando gli insiemi invarianti discutere la stabilità dei punti di equilibrio;
- c) tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y) studiandone anche il comportamento per $t \rightarrow \pm\infty$.

Esercizio 3: In un piano verticale fissiamo un sistema di riferimento Oxy con asse y verticale ascendente. In questo piano si consideri un corpo puntiforme P di massa m , vincolato a muoversi sulla curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R(\sin \theta + \theta) \\ y = R(\cos \theta + 1) \end{cases} \quad -\pi < \theta < \pi,$$

con $R > 0$. Il corpo è soggetto alla forza di gravità di intensità mg e ad una forza elastica prodotta da una molla di costante k che congiunge P al punto $Q \equiv (0, 3R)$. Usando come coordinata θ

- a) si scriva la lagrangiana del sistema meccanico;
- b) si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità in funzione dei parametri m, g, k, R .