Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
18 Gennaio 2010

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il moto di due corpi puntiformi P_1, P_2 di uguale massa $m = 1$, soggetti soltanto alla mutua interazione gravitazionale con costante di gravitazione $G = 1$.

Assumiamo che al tempo $t = 0$ la posizione e la velocità di P_2 relativamente a P_1 abbiano coordinate

$$\mathbf{r} = (-3, 4, 0) \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \eta, 0) \ .$$

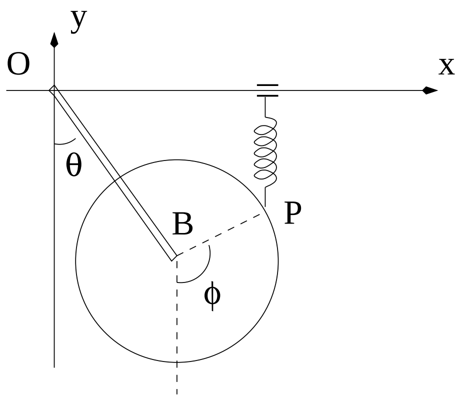
a) Per quali valori di η il moto relativo dei due corpi è limitato e periodico?

b) Per quali valori di η c'è una collisione?

c) Nel caso di collisione trovare qual'è l'estremo superiore della distanza tra i due corpi nell'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy, con asse y verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2R$ vincolata per un estremo al baricentro B del disco. L'altro estremo dell'asta è incernierato all'origine del riferimento. Inoltre un punto P del bordo del disco è collegato all'asse x da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, che si mantiene sempre parallela all'asse y. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.



Usando come coordinate lagrangiane l'angolo θ tra l'asta e la direzione verticale e l'angolo ϕ tra BP e la direzione verticale (vedi figura)

a) scrivere la lagrangiana del sistema;

b) trovare tutti gli equilibri al variare del parametro

$$J = \frac{g(m+2M)}{Rk} \ ;$$

c) dimostrare che per $J > 2$ la configurazione $(\theta, \phi) = (0, \pi)$ è stabile e trovare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno a tale configurazione.

Terzo Esercizio

a) Dimostrare che la trasformazione di coordinate

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) \to (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$$

definita da

$$\begin{cases} q_1 &= \frac{1}{\alpha}\,(\sqrt{2\,P_1}\,\sin Q_1 + P_2) \\ q_2 &= \frac{1}{\alpha}\,(\sqrt{2\,P_1}\,\cos Q_1 + Q_2) \\ p_1 &= \frac{1}{2}\,\alpha\,(\sqrt{2\,P_1}\,\cos Q_1 - Q_2) \\ p_2 &= \frac{1}{2}\,\alpha\,(-\sqrt{2\,P_1}\,\sin Q_1 + P_2) \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, è canonica.

b) Data la hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2\,m}\left[(p_1 + \frac{\alpha^2}{2}\,q_2)^2 + (p_2 - \frac{\alpha^2}{2}\,q_1)^2\right]$$

integrare le equazioni canoniche associate utilizzando la trasformazione precedente.