Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
11 Febbraio 2010

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $O\mathbf{xy}$, con asse $O\mathbf{y}$ verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico piano composto da un anello omogeneo di massa m e raggio R che può rotolare senza strisciare sull'asse x. All'interno dell'anello può scivolare un quadrato omogeneo, di massa M e lunghezza $\ell = \sqrt{2}R$ mantenendo i suoi quattro vertici $Q_j, j = 1\dots 4$, sempre a contatto con l'anello. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione g.

Considerando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto B, che corrisponde al baricentro sia del quadrato che dell'anello, e l'angolo θ che BQ_1 forma con la direzione verticale:

1) scrivere la lagrangiana del sistema e mostrare che $\dot{s}, \dot{\theta}$ sono integrali primi;

2) mostrare che, se $\dot{\theta}(0) \neq 0$, il centro di istantanea rotazione del quadrato coincide con B solo se $\dot{s}(0) = 0$;

3) mostrare che, se $\dot{\theta}(0) \neq 0$, il centro di istantanea rotazione del quadrato coincide con il punto di contatto P tra l'anello e l'asse x solo se le velocità angolari dell'anello e del quadrato sono uguali.

Secondo Esercizio

Fissato un sistema di riferimento $O\mathbf{xyz}$, con asse $O\mathbf{z}$ verticale ascendente si consideri un punto materiale P di massa m vincolato ad una sfera di raggio $R > 0$ e di equazioni parametriche

$$x = R\cos\theta\cos\phi\,; \qquad y = R\cos\theta\sin\phi\,; \qquad z = R\sin\theta\,,$$

con $\phi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Supponendo il vincolo liscio si studi il moto nei casi seguenti:

a) in assenza di forze attive;

b) in presenza della forza di gravità, di accelerazione g;

c) in presenza della gravità e della forza elastica esercitata da una molla di costante $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che collega P con il punto $S \equiv (0, 0, -R)$.

In particolare, in ciascuno dei tre casi,

1) scrivere la lagrangiana ridotta nei tre casi utilizzando il metodo di riduzione di Routh;

2) mostrare che nei tre casi, per ogni valore non nullo del momento coniugato alla variabile ciclica, c'è un'unica configurazione di equilibrio nello spazio ridotto che è stabile e corrisponde ad un'orbita con traiettoria circolare sulla sfera;

3) descrivere le traiettorie sulla sfera nel caso in cui il momento coniugato alla variabile ciclica sia non nullo.

4) descrivere le traiettorie sulla sfera nel caso in cui il momento coniugato alla variabile ciclica sia nullo (*caveat*: la parametrizzazione della sfera suggerita è singolare ai poli).

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \left(\frac{p_1 - p_2}{2\, q_1} \right) + p_2 + (q_1 + q_2)^2 \ .$$

Estendere la trasformazione di coordinate

$$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \ni (q_1, q_2) \to (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$$

definita da

$$Q_1 = q_1^2 \,, \qquad Q_2 = q_1 + q_2$$

ad una trasformazione canonica $\mathbf{\Psi} : (q_1, q_2, p_1, p_2) \to (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ in modo che la hamiltoniana trasformata $K = H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$ non dipenda da Q_1. Scrivere quindi la soluzione generale del sistema hamiltoniano di partenza in dipendenza delle condizioni iniziali $(q_{1,0}, q_{2,0}, p_{1,0}, p_{2,0})$.