

Compito parziale di Meccanica Razionale e Analitica
28 Maggio 2009

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri un punto materiale P di massa m vincolato alla superficie parametrica definita da

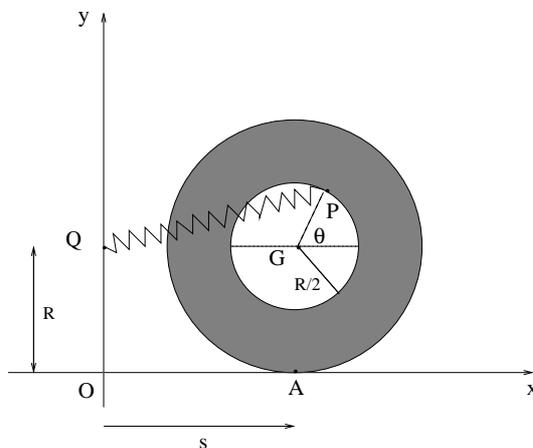
$$x = A \cos \delta \cos \alpha, \quad y = A \cos \delta \sin \alpha, \quad z = B \sin \delta,$$

con $\alpha \in S^1, \delta \in (-\pi/2, +\pi/2)$ ed A, B ($A \neq B$) due numeri positivi. Si assuma che sul punto non agiscano forze attive e che la superficie sia liscia.

- i) scrivere la lagrangiana del sistema;
- ii) usare il metodo di Routh per ridurre il problema ad un solo grado di libertà e descrivere le soluzioni del problema ridotto;
- iii) utilizzando il punto precedente descrivere i moti del punto P sulla superficie al variare delle condizioni iniziali.

Secondo Esercizio

In un piano verticale Oxy una corona circolare omogenea \mathcal{C} , di centro G , massa m , raggio esterno R e raggio interno $R/2$, è vincolata a rotolare senza strisciare sull'asse delle ascisse Ox . Un punto materiale P , di massa m , può scorrere senza attrito lungo il bordo interno della corona ed è connesso al punto $Q \equiv (0, R)$ da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione $-g\hat{y}$ (\hat{y} è il versore dell'asse Oy). Si assumano come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto di contatto A della corona circolare con l'asse delle ascisse e l'angolo θ (misurato in senso antiorario) che il segmento PG forma con la direzione orizzontale.



- a) Scrivere l'energia cinetica del sistema.
- b) Calcolare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare del parametro $\alpha = \frac{kR}{mg}$.
- c) Scrivere l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile quando $\alpha = 1$.