

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

28 Gennaio 2008

**Esercizio 1:** Si studi il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = x \frac{\sin r}{r} - y(1+r) \\ \dot{y} = y \frac{\sin r}{r} + x(1+r) \end{cases}$$

con  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . In particolare si descrivano gli insiemi  $\alpha$  e  $\omega$  limite di tutte le orbite e si tracci il ritratto di fase del sistema.

*Suggerimento:* si scriva il corrispondente sistema dinamico per le coordinate polari  $r, \theta$ , definite dalle relazioni  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ .

**Esercizio 2:** Dato il sistema dinamico discreto in  $\mathbf{R}^2$

$$X_{k+1} = A X_k; \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

dove

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

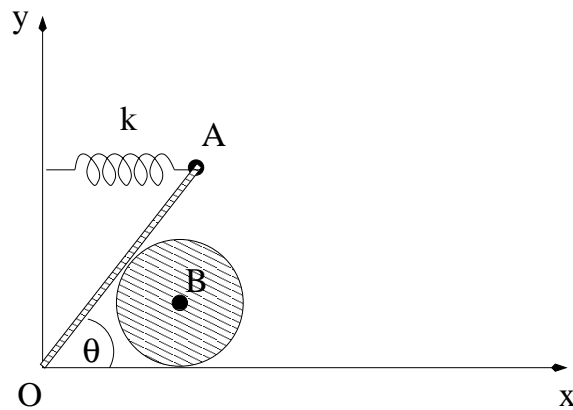
con  $x_0, y_0$  parametri reali assegnati, se ne trovi la soluzione generale.

Che relazione ha questo sistema con l'equazione alle differenze finite che definisce la successione di Fibonacci?

**Esercizio 3:**

In un piano verticale con coordinate  $x, y$  (l'asse  $y$  è verticale) si consideri il sistema meccanico costituito da due corpi puntiformi di ugual massa  $m$  situati nei punti  $A$  e  $B$  rispettivamente. Il punto  $A$  è l'estremo di un'asta di lunghezza  $\ell$  e massa trascurabile, libera di ruotare nel piano con l'altro estremo fissato nell'origine; tale punto è inoltre collegato all'estremo di una molla di costante elastica  $k > 0$  e l'altro estremo della molla è libero di scorrere sull'asse  $y$ . Il punto  $B$  è al centro di un disco di raggio  $R$  e massa trascurabile. Il disco è imprigionato tra l'asta e l'asse  $x$ . Inoltre i corpi puntiformi sono soggetti ad un'accelerazione di gravità di intensità  $g$ .

Usando come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  tra l'asse  $x$  e l'asta, con  $0 < a < \theta < \pi$  ( $a$  è il valore per cui il disco perde il contatto con l'asta),



- a) si scrivano l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema;
- b) si scriva la hamiltoniana e si trovino i punti di equilibrio in funzione dei parametri  $m, g, k, \ell, R$ ;
- c) si determini la stabilità dei punti di equilibrio;
- d) si tracci il diagramma di biforcazione degli equilibri in funzione del parametro  $J = \frac{mg}{k\ell}$ ;
- e) si spieghi l'effetto del parametro  $R/\ell$  sul diagramma di biforcazione.