

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

15 Novembre 2007

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- (a) trovare gli esponenti di Lyapounov e discutere la stabilità del punto di equilibrio;
- (b) trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 2: Dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = f(y) \\ \dot{y} = -x - \gamma f(y) \end{cases} \quad \text{con } f(y) = y(2y^2 - 1), \quad \gamma > 0 ,$$

- 1) trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità;
- 2) trovare le direzioni delle tangenti alle separatrici dei punti di sella e mostrare come cambiano al variare di γ ;
- 3) per ciascuno dei punti di equilibrio asintoticamente stabili descrivere esplicitamente un aperto contenuto nel suo bacino di attrazione (*suggerimento*: cercare un integrale primo del sistema con $\gamma = 0$ della forma $H(x, y) = F(x) + G(y)$);
- 4) fare un disegno qualitativo delle separatrici dei punti di sella ed indicare i bacini di attrazione dei pozzi per γ piccolo.