

# Compito di Meccanica Razionale e Analitica

9 Febbraio 2009

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

## Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$  con asse  $z$  verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico costituito da un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi su una superficie liscia  $\Sigma$ , descritta dai parametri  $\theta, \phi \in S^1$  come segue:

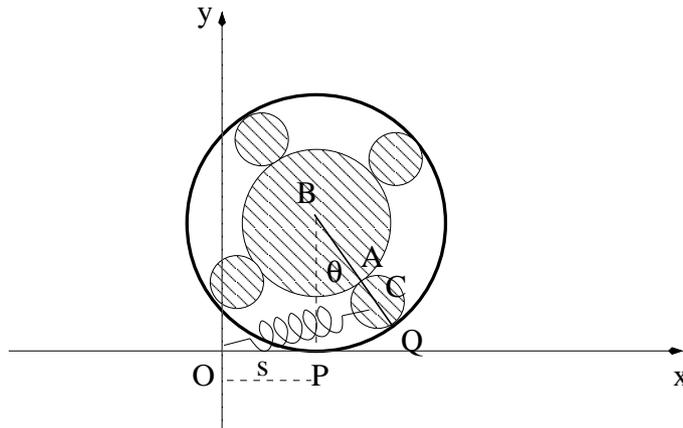
$$x = (r \cos \theta + R) \cos \phi, \quad y = (r \cos \theta + R) \sin \phi, \quad z = r \sin \theta,$$

con  $R, r$  costanti positive,  $R > r$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione  $g$ .

- a) Scrivere la lagrangiana  $L$  del sistema;
- b) per ogni valore  $c$  dell'integrale primo corrispondente alla variabile ciclica in  $L$  scrivere la lagrangiana ridotta  $L_c^R$  con il metodo di Routh;
- c) dimostrare che esistono 2 orbite periodiche con traiettoria circolare su  $\Sigma$  e valori costanti di  $\theta = \theta_1, \theta_2$ , con  $\theta_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \theta_2 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ ;
- d) dimostrare che, per ogni valore  $c \neq 0$  dell'integrale primo, esistono moti che si avvolgono spiraleggiando sulla superficie, cioè esiste una costante  $\kappa > 0$  tale che  $|\dot{\phi}|, |\dot{\theta}| \geq \kappa$ .

## Secondo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico piano formato da un anello di raggio  $R$  e massa  $M$ , un disco di raggio  $r$  e massa  $m$  e quattro dischetti di uguali raggi  $\rho$  e masse  $\mu$ . Tali corpi sono omogenei e vale la relazione  $R = r + 2\rho$ . L'anello rotola senza strisciare su una guida orizzontale coincidente con l'asse  $x$  di un sistema di riferimento  $Oxy$ , con asse  $y$  verticale ascendente. All'interno dell'anello si muovono il disco ed i quattro dischetti: il disco è vincolato a mantenere il suo baricentro  $B$  in corrispondenza del baricentro dell'anello tramite i quattro dischetti, disposti in modo tale che i loro centri siano i vertici di un quadrato (vedi figura). I corpi a contatto rotolano gli uni sugli altri senza strisciare. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione  $g$ , ed una forza elastica di costante  $k > 0$  prodotta da una molla che collega l'origine del sistema di riferimento  $O$  al centro  $C$  di uno dei dischetti. Usando



come coordinate lagrangiane l'ascissa  $s$  del baricentro  $B$  e l'angolo  $\theta$  che  $BC$  forma con la direzione verticale

- a) trovare le velocità angolari dell'anello, del disco e dei dischetti;
- b) scrivere la lagrangiana del sistema;
- c) trovare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità;
- d) scrivere l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.