

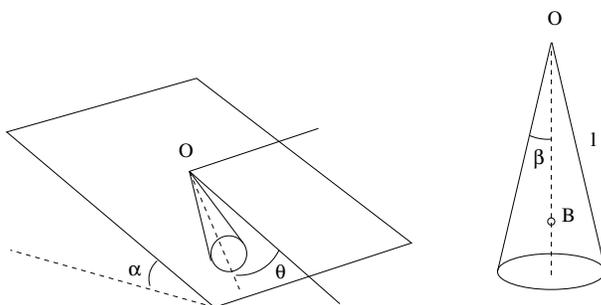
# Compito di Meccanica Razionale e Analitica

5 Giugno 2008

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

## Primo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico formato da un cono pieno e omogeneo di massa  $M$ , semi-apertura  $\beta$  e lunghezza di una generatrice  $\ell$ , vincolato a rotolare senza strisciare su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto ad un piano orizzontale. Usando come parametro lagrangiano l'angolo  $\theta$  che la generatrice del cono a contatto con il piano forma con la direzione di massima pendenza,

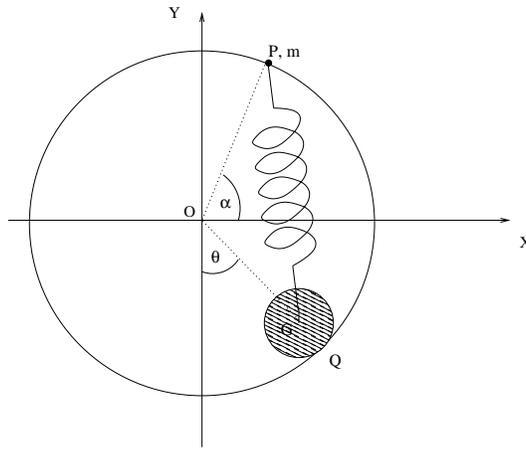


- determinare la direzione della velocità angolare del cono e calcolarne la norma;
- calcolare l'energia potenziale della forza di gravità sapendo che il baricentro  $B$  del cono si trova sull'asse di simmetria, ad un'altezza dalla base che è  $1/4$  della sua altezza totale;
- calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al vertice del cono  $O$ ;
- scrivere la lagrangiana del sistema e l'equazione di Lagrange.

## Secondo Esercizio

Una guida circolare di massa trascurabile e raggio  $R$ , con centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali  $OXYZ$ , è vincolata a rimanere nel piano verticale  $XY$  e ruota in senso antiorario attorno all'asse  $Z$ ; sulla guida è saldato un punto  $P$  di massa  $m$ . All'interno della guida può rotolare senza strisciare un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $r$  ( $2r < R$ ), il cui baricentro  $G$  è collegato al punto  $P$  attraverso una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla.

- a) Usando come parametri lagrangiani l'angolo  $\alpha$  che il segmento  $\overline{OP}$  forma con l'asse  $X$  e l'angolo  $\theta$  che il segmento  $\overline{OG}$  forma con l'asse  $Y$  (vedi figura) scrivere la lagrangiana del sistema.



Assumiamo adesso che  $\frac{R}{r} = 4$  e  $\frac{mg}{kR} = 1$ .

- b) Mostrare che le configurazioni

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \theta_1) &= \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), & (\alpha_2, \theta_2) &= \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \\
 (\alpha_3, \theta_3) &= \left(\frac{3}{2}\pi, 0\right), & (\alpha_4, \theta_4) &= \left(\frac{3}{2}\pi, \pi\right)
 \end{aligned}$$

sono di equilibrio e studiarne la stabilità;

- c) scrivere l'equazione di secondo grado per il calcolo delle frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.