Compito di Meccanica Razionale e Analitica
16 Gennaio 2009

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse z vertical ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un cono omogeneo $\mathcal{C}_2$ di massa M, semiapertura β e lunghezza di una generatrice ℓ, vincolato a rotolare senza strisciare su di un cono fisso $\mathcal{C}_1$ di semiapertura α e lunghezza di una generatrice ℓ. Il cono $\mathcal{C}_2$ mantiene sempre una generatrice a contatto con $\mathcal{C}_1$ ed i due coni hanno sempre il vertice in comune, coincidente con O. Inoltre l'asse di $\mathcal{C}_1$ è parallelo alla direzione verticale Oz (vedi figura).

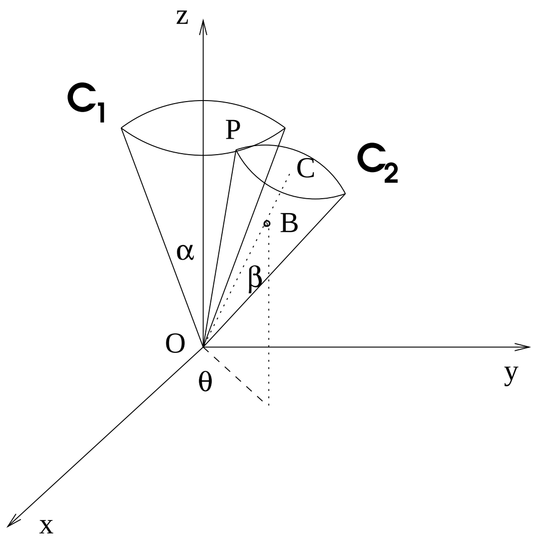

Figura 1

Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che la proiezione della generatrice a contatto OP sul piano xy forma con l'asse x:

a) scrivere la lagrangiana L del sistema;

b) scrivere il momento angolare del cono rispetto al polo O;

c) confrontare il limite della lagrangiana L per $\beta \to 0$ con la lagrangiana di un'asta rigida omogenea di lunghezza ℓ e massa M vincolata a muoversi sula superficie del cono $\mathcal{C}_1$ mantenendo un estremo in comune col vertice del cono.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxz, con asse z verticale ascendente, e si consideri il sistema meccanico formato da:

- un corpo rigido $\mathcal{C}$ costituito da un anello omogeneo di massa m e raggio R e da un'asta AB, omogenea e di massa m, di lunghezza $2R$ saldata all'anello in modo che AB sia un diametro;
- un punto P di massa m libero di muoversi senza attrito sull'asta AB e collegato al centro C dell'anello da una molla di costante elastica k.

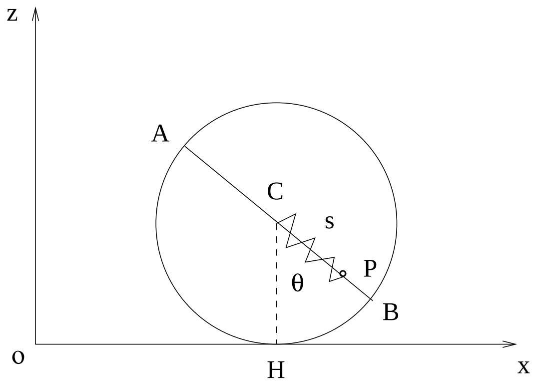

Figura 1

Il corpo rigido $\mathcal{C}$ rotola senza strisciare sull'asse x e tutto il sistema è soggetto alla forza peso. Si prendano come parametri lagrangiani l'angolo θ che B-A forma con la direzione negativa dell'asse z e l'ascissa s del punto P su AB ($-R \leq s \leq R$), misurata da C e positiva verso B. Sia poi $\alpha = \frac{m\,g}{k\,R}$.

a) Scrivere le equazioni di Lagrange per il moto del sistema.

b) Studiare le configurazioni d'equilibrio e la relativa stabilità al variare del paramentro α.

c) Trovare i periodi delle piccole oscillazioni del sistema attorno ad una delle configurazioni d'equilibrio stabile nell'ipotesi $\alpha = \frac{1}{2}$.