CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 2

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

9 Gennaio 2007

Esercizio 1: Sia dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà con dissipazione
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 1 - x^2 - \gamma\,\frac{dx}{dt}$$
dove $\gamma > 0$, con punti di equilibrio $(-1, 0)$ (sella) e $(1, 0)$ (pozzo).
a) Si trasformi il sistema newtoniano in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo $h > 0$ usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro:
$$D^2x(kh) \simeq \frac{\Delta_0^2\, x_k}{h^2} \quad ; \quad Dx(kh) \simeq \frac{\Delta_- x_k}{h} \quad ;$$
e in un sistema dinamico discreto usando come variabile $y_k = x_k - x_{k-1}$;
b) si trovino i punti fissi del sistema dinamico discreto e si calcoli la linearizzazione del sistema in tali punti;
c) supponendo $0 < \gamma < 1$ e $0 < h < 1$ dimostrare che valgono le seguenti condizioni:

c1) in $(-1, 0)$ i moltiplicatori di Lyapounov sono uno < 1 e uno > 1;

c2) in $(1, 0)$ i moltiplicatori di Lyapuonov sono < 1;

Suggerimento: per c1,c2 si calcolino i valori del polinomio caratteristico, ed eventualmente della sua derivata, in punti opportuni.

d) sempre supponendo $0 < \gamma < 1$ trovare un valore h_0 tale che gli autovalori del linearizzato in $(1, 0)$ siano complessi coniugati per $0 < h < h_0$.

Esercizio 2: a) Si cerchi la più semplice trasformazione canonica $(p, q) \mapsto (w, z)$ tale che
$$z = tan(q);$$
b) si trasformi con il cambiamento di variabili trovato al punto a) la Hamiltoniana
$$H(p, q) = \frac{1}{2}\,\left[p^2\,\cos^4(q) + \tan^2(q)\right]^2$$
e si descrivano le orbite del sistema hamiltoniano corrispondente;
c) per un dato valore della Hamiltoniana $H = h$ si trovi il periodo delle orbite.

Esercizio 3: Sia dato un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi su di una curva di equazione $r^2 - z^2 = 1$ nel piano verticale, ruotante attorno all'asse z con velocità angolare costante ω. Supponiamo che il corpo puntiforme sia soggetto ad un'accelerazione di gravità rivolta verso il basso e di intensità g. Si suggerisce di parametrizzare la curva come segue:

$$r = \cosh(s); \qquad z = \sinh(s)\,,$$

con s variabile reale.

a) Si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;

b) Si scrivano la funzione di Hamilton e le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio (relativo) del sistema dinamico Hamiltoniano in funzione dei parametri reali positivi m, g, ω;

c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio;

d) Si tracci un disegno qualitativo delle orbite.