Meccanica Razionale e Analitica
USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Considerare il funzionale

$$J(y) = \int_0^\pi y'^2 dx$$

nella classe delle funzioni

$$A = \Big\{ y(x) \in C^1([0,\pi]),\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0,$$
$$\int_0^\pi (4(\cos(x))^2 - 2) y(x) dx = 1 \Big\}.$$

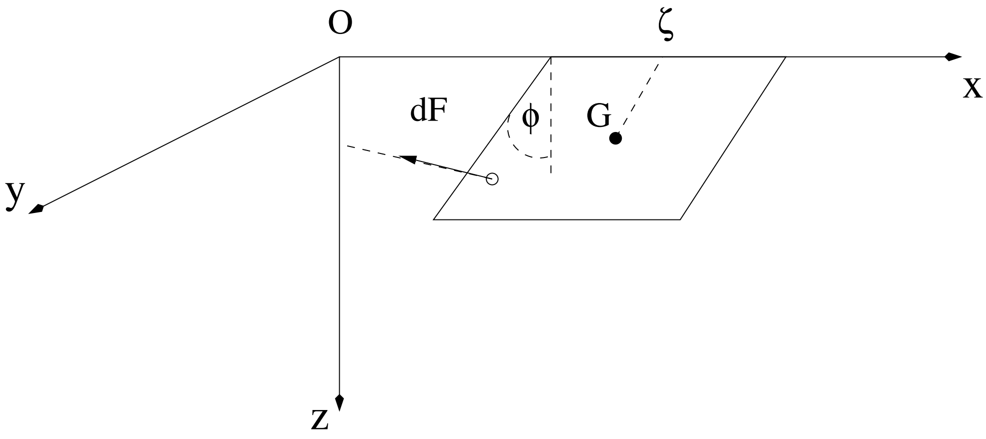
Provare che il minimo assoluto del funzionale esiste e calcolarlo.

Secondo Esercizio

Uno dei lati di una piastra sottile, quadrata, omogenea e pesante di lato $2a$ e massa m è libero di muoversi senza attrito lungo un asse orizzontale Ox. Ciascun elemento superficiale di massa dm della piastra è attirato dall'asse Oz verticale discendente da una forza di intensità $dF = krdm$ normale a quest'asse, r è la distanza dell'elemento d'area dall'asse Oz, k è una costante positiva.

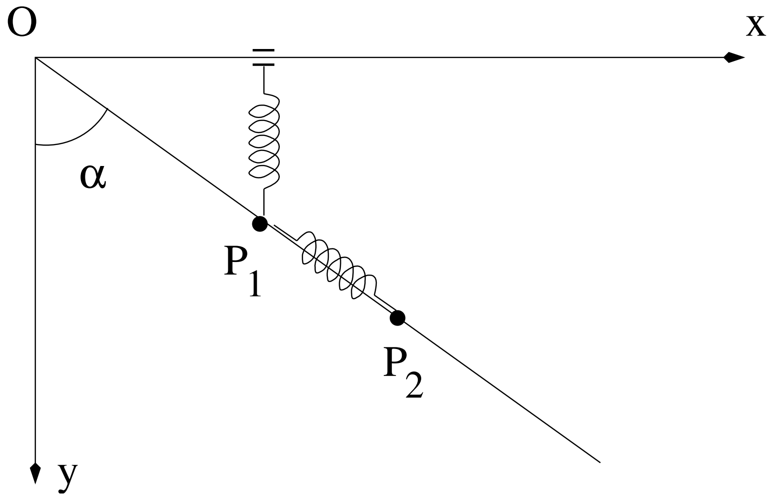
Assumere come parametri lagrangiani l'ascissa ζ del baricentro G della piastra rispetto al riferimento $Oxyz$ e l'angolo ϕ formato dal piano della piastra e dal piano Oxz. Trovare la lagrangiana.

Per calcolare il potenziale delle forze elastiche che agiscono sulla piastra si consiglia di usare un riferimento cartesiano ortogonale solidale di centro G e assi GX e GY paralleli ai lati della piastra.



Terzo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico piano costituito da un'asta rettilinea di massa trascurabile con un estremo incernierato nell'origine di un sistema di riferimento Oxy con asse y verticale discendente. Lungo l'asta possono scivolare due corpi puntiformi P_1, P_2 di uguale massa m. I due corpi sono collegati tra loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il primo corpo P_1 è inoltre collegato da una seconda molla all'asse x: tale molla ha le stesse caratteristiche fisiche della prima ed è vincolata a mantenersi sempre parallela all'asse y. Il sistema è anche soggetto alla forza peso, con accelerazione di gravità g.



Considerando come coordinate lagrangiane l'angolo α che l'asta forma con l'asse y e le due ascisse s_1, s_2 di P_1, P_2 lungo l'asta,

1) scrivere la lagrangiana del sistema;

2) assumendo $mg = k$, individuare la configurazione di equilibrio stabile con $\alpha = 0$;

3) trovare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno a tale configurazione di equilibrio.

Prova al Calcolatore

Risolvere tramite MAPLE il problema di Cauchy

$$y'' + 4y' + 5y = f(x),\ y(-\pi) = 1,\ y'(-\pi) = 0$$

dove:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \leq 0 \\ 3e^{2x}\sin(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Tracciare il grafico della soluzione nell'intervallo $[-1, 1]$.