

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

13 settembre 2006

**Esercizio 1:** Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- (a) trovare gli esponenti di Lyapounov, discutere la stabilità;
- (b) trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali  $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ .

**Esercizio 2:**

Sia dato un riferimento inerziale  $Oxyz$  con asse  $z$  verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un'asta rigida  $AB$  di massa trascurabile di lunghezza  $2\ell$ : l'estremo  $A$  dell'asta è libero di scorrere lungo l'asse  $z$  e l'estremo  $B$  può scorrere lungo una retta  $r$  incernierata nell'origine  $O$  e ruotante con velocità angolare costante  $\omega$ . Nel punto medio dell'asta è saldato un corpo puntiforme di massa  $m$ , inoltre una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica  $k > 0$  collega l'estremo  $B$  all'origine  $O$ . Utilizzando come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con l'asse  $z$ ,

- a) si scrivano la lagrangiana, la hamiltoniana, le equazioni di Hamilton e l'energia totale;
- b) si trovino i punti di equilibrio del sistema hamiltoniano e se ne discuta la stabilità in funzione dei parametri  $m, k, g, \ell, \omega$ ;
- c) si tracci il diagramma di biforcazione in funzione del parametro

$$J = \frac{(4k - m\omega^2)\ell}{mg}.$$

**Esercizio 3:** Dato il sistema newtoniano

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sinh x$$

lo si discretizzi in modo conservativo con passo  $h$ .

- a) si scrivano le equazioni della mappa standard;
- b) si studi la stabilità lineare dei punti di equilibrio della mappa standard in funzione del passo  $h$ .