

# Meccanica Razionale e Analitica

9 Giugno 2006

## USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

### Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 |y'''(x)|^2 dx$$

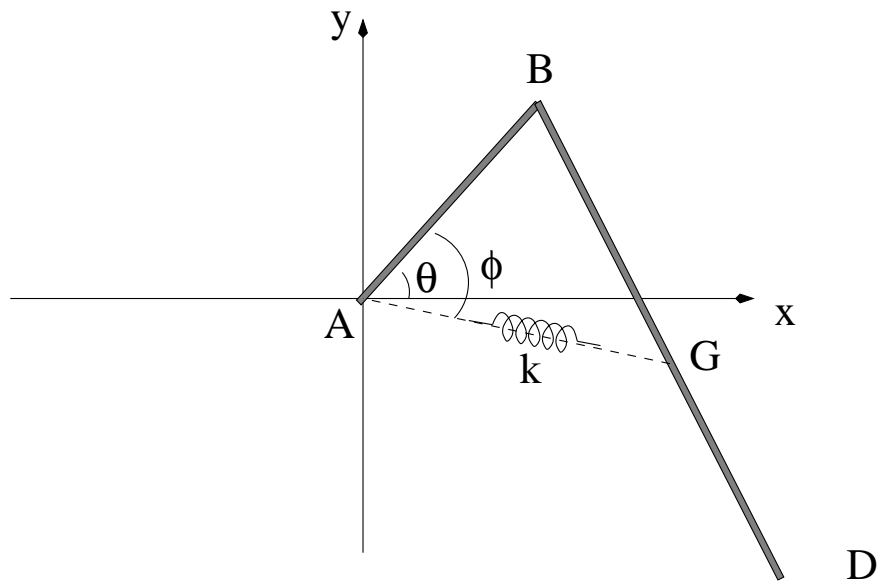
ha minimo assoluto nella classe delle funzioni  $C^3([0, 1])$  tali che

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3, \quad y''(1) = 6.$$

### Secondo Esercizio

Un piano orizzontale è riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Axy$ . In questo piano è libero di muoversi senza attrito un sistema formato da due aste omogenee  $AB$  e  $BD$  entrambe di massa  $m$  e di lunghezze rispettive  $L$  e  $2L$ . L'asta  $AB$  è vincolata a muoversi attorno al suo punto fisso  $A$  coincidente con l'origine del riferimento cartesiano. Mentre l'asta  $BD$  è incernierata con la prima asta nell'estremo  $B$ . Sul baricentro  $G$  dell'asta  $BD$  agisce una forza elastica attrattiva di costante  $k > 0$  diretta verso il punto  $A$ . Si assumano come parametri lagrangiani del sistema l'angolo  $\theta$  che l'asse  $Ax$  forma con l'asta  $AB$  e l'angolo  $\phi$  che il segmento  $AG$  forma con l'asta  $AB$  (vedi figura).

Trovare la lagrangiana del sistema e due integrali primi del moto.



### Terzo Esercizio

Si consideri un corpo puntiforme  $P$  di massa  $m$  vincolato a muoversi su un piano orizzontale e liscio. Su  $P$  agisce una forza elastica, di costante  $k > 0$ , che attira il corpo verso un centro  $O$ .

Utilizzando come variabili lagrangiane le coordinate polari  $(r, \theta)$ , dove  $r$  è la distanza di  $P$  da  $O$  e  $\theta$  è l'angolo che il segmento  $OP$  forma con una direzione fissa nel piano del moto,

(i) si scrivano la lagrangiana  $L$  del sistema e le equazioni di Lagrange;

(ii) osservando che la variabile  $\theta$  è ciclica, si consideri il suo momento coniugato

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$

e si dimostri che l'integrale primo  $|p_\theta|$  è la norma del momento angolare di  $P$  rispetto al polo  $O$ .

(iii) si scriva la lagrangiana ridotta con il metodo di Routh;

(iv) Si dimostri che se il momento angolare del corpo rispetto al polo  $O$  è diverso da zero, allora il corpo, durante il suo moto, non può mai passare per il punto  $O$ .

### Prova al calcolatore

(a) Trovare l'estremale del primo esercizio tramite MAPLE.

(b) Studiare tramite MAPLE i punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 32(x^2 + y^2).$$

Determinare il minimo ed il massimo assoluto della  $f(x, y)$  nel disco chiuso che ha il centro nell'origine e raggio 3.