Prima Prova in "Itinere"
Meccanica Razionale e Analitica, 8/5/2006
USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Trovare l'estremale del funzionale

$$J(y) = \int_1^2 \left[x^2 \left| \frac{dy}{dx} \right|^2 - (1/4) y^2 \right] dx$$

tale che

$$y(1) = 1, \; y(2) = 1.$$

Secondo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{dy}{dx} \right|^2 dx + y(1/4)$$

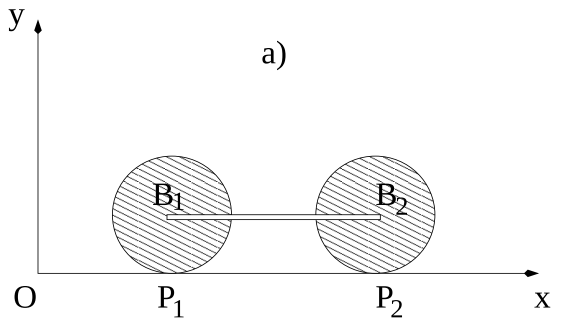
nella classe delle funzioni

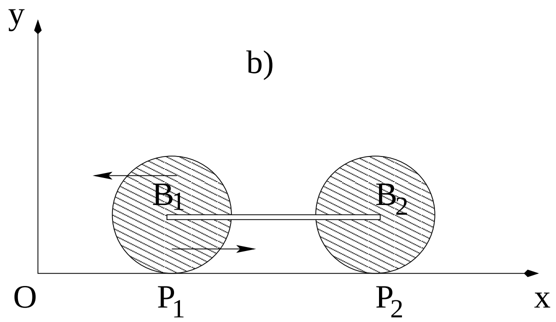
$$A = \{ y(x) \in C_S^1([0,1]); \; y(0) = 0, \; y(1) = 0 \}$$

ha minimo assoluto e trovarlo.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico piano formato da due dischi omogenei $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ di massa m e raggio R i cui baricentri B_1, B_2 sono vincolati agli estremi di un'asta di massa trascurabile e lunghezza $\ell > 2R$. I dischi possono rotolare senza strisciare sull'asse x di un sistema di riferimento Oxy verticale (vedi figura).





a) Utilizzando come coordinata l'ascissa s del baricentro B_1 si scriva l'equazione del moto del sistema e se ne determini il moto. Si trovino inoltre le componenti delle reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$, esercitate in P_1, P_2, lungo la direzione dell'asse x.
b) Si applichi al disco $\mathcal{D}_1$ un motorino di massa trascurabile, che genera sul disco una coppia di forze di momento $L\mathbf{e}_3$ (*nota*: il momento di una coppia di forze è indipendente dal polo rispetto a cui si calcola). Assumiamo per semplicità le condizioni iniziali $s(0) = \dot{s}(0) = 0$. Come cambiano le risposte al punto precedente?

Prova al calcolatore

(a) Risolvere tramite MAPLE il primo esercizio.
(b) Risolvere il problema di Cauchy:

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 6x \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

$$y(1) = 1, \ \frac{dy}{dx}(1) = 2, \ \frac{d^2y}{dx^2}(1) = 3.$$

Se $y(x)$ è la soluzione calcolare numericamente il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare il grafico di $y(x)$ relativo all'intervallo $[1, 2]$ attorno all'asse x.