

Meccanica Razionale e Analitica
13 Febbraio 2007
USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Provare che il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (y'')^2 dx$$

ha minimo assoluto nella classe delle funzioni

$$A = \{y(x) \in C^4([0, 1]), y(0) = 0, y'(0) = 0,$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0, \int_0^1 y dx = 1\}$$

e calcolarlo.

Secondo Esercizio

Un piano verticale è riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy con l'asse Oy verticale discendente. Un'asta pesante omogenea AB , di massa M ha gli estremi vincolati a scorrere su due guide rettilinee verticali del piano xOy poste a ugual distanza dall'asse Oy mantenendosi sempre orizzontale durante il moto. Su gli estremi A e B dell'asta si esercitano forze viscosse di legge

$$\mathbf{F}_A = -h\mathbf{v}_A, \mathbf{F}_B = -h\mathbf{v}_B$$

dove $h > 0$ è una costante e \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B sono le velocità nei punti A e B dell'asta. Il centro G di un disco pesante omogeneo di massa m e raggio R è collegato al punto O tramite una molla di costante elastica $K > 0$. Il disco rotola senza strisciare sull'asta AB mantenendosi sempre nel piano verticale al di sotto dell'asta. Assumere come parametri lagrangiani le coordinate x_G y_G del centro del disco.

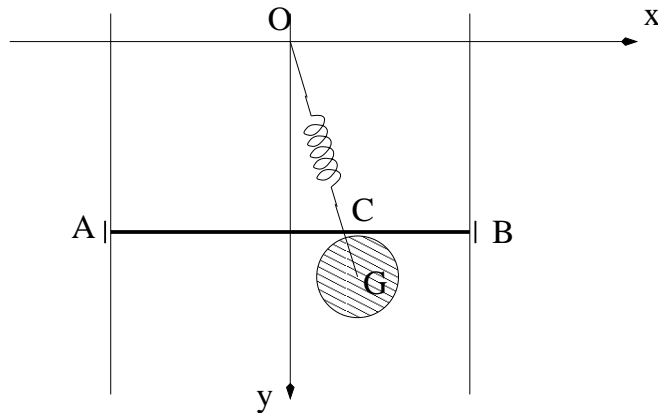


Figura 1

- 1) Trovare le equazioni di Lagrange del sistema.
- 2) Calcolare la soluzione delle equazioni di moto corrispondente alle condizioni iniziali:

$$x_G(0) = 0, \quad \frac{dx_G}{dt}(0) = \beta, \quad y_G(0) = \frac{g(M+m)}{k}, \quad \frac{dy_G}{dt}(0) = 0$$

- 3) Calcolare la reazione vincolare che si esercita sul disco nel punto di contatto C con la sbarra e che corrisponde alla soluzione del punto 2).

Secondo Esercizio

In un piano verticale si consideri un sistema di riferimento Oxy con asse y verticale ascendente. Un anello omogeneo di massa M e raggio R può rotolare senza strisciare sull'asse x ed un disco omogeneo di massa m e raggio $r < R$ può a sua volta rotolare senza strisciare all'interno dell'anello (vedi Figura 2).

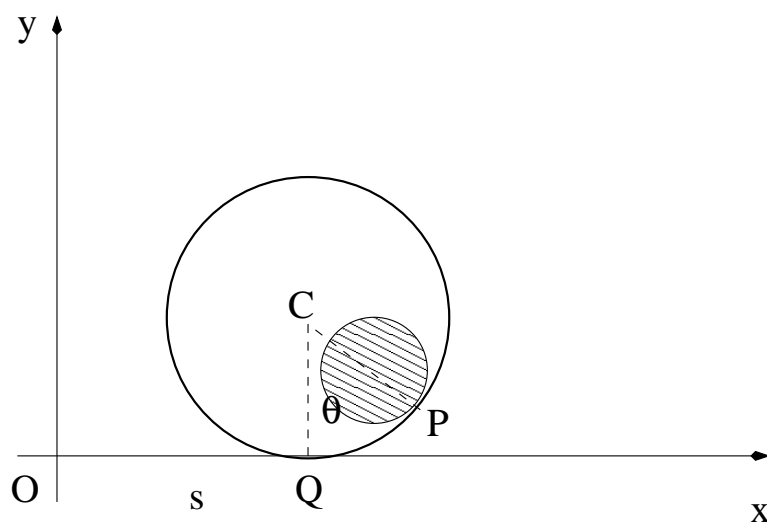


Figura 2

Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del baricentro C dell'anello e l'angolo θ , che il segmento che congiunge C con il punto di contatto P tra disco e anello forma con la direzione verticale,

- 1) si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- 2) si trovino gli integrali primi del sistema.

Prova al calcolatore

calcolare con 8 cifre decimali esatte i numeri

$$\sum_{k=1}^n 1/k - \ln(n)$$

per $n = 10, n = 10^2, n = 10^3, n = 10^4, n = 10^5, n = 10^6, n = 10^7$.