Meccanica Razionale e Analitica
Seconda Prova in "Itinere"
24/05/05
USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI

Primo Esercizio

Un piano verticale in cui è fissato il riferimento cartesiano ortogonale Oxy ruota intorno all'asse Oy verticale ascendente con velocità angolare costante ω. Un'asta pesante omogenea AB è libera di muoversi nel piano con l'estremo A sempre coincidente con O. Una seconda asta CD, anch'essa giacente nel piano mobile, ha l'estremo C sempre coincidente con B mentre l'estremo D è vincolato a muoversi sull'asse Ox (vedi Figura 1). Le aste sono pesanti, hanno entrambe massa m e la stessa lunghezza l. Tutti i vincoli si suppongono privi di attrito. Assunto come parametro lagrangiano l'angolo ϕ, $-\pi \leq \phi < \pi$, che l'asta AB forma con l'asse Oy
(1) trovare al variare del parametro $\mu = \frac{3g}{8l\omega^2}$ le posizioni di equilibrio relativo del sistema e determinare quelle che sono stabili.
(2) Provare che nel riferimento del piano ruotante vale l'integrale primo dell'energia e da questo trovare l'equazione di moto del sistema.
(3) Determinare l'hamiltoniana.

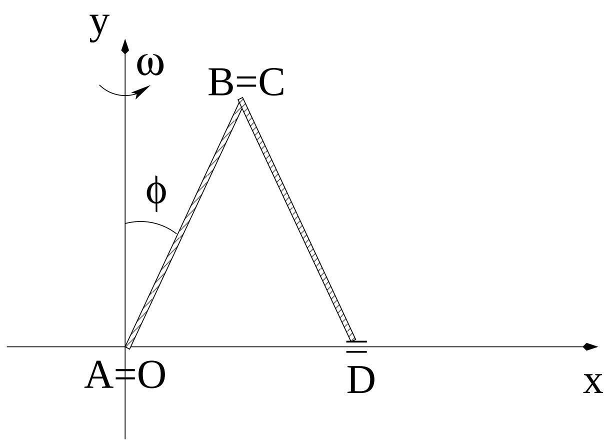

Figura 1

Secondo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1, P_2, di uguale massa m, che si muovono in un piano orizzontale. I due punti sono inoltre vincolati a muoversi su due guide paraboliche, di equazioni $y = 1 + x^2/2, y = -1 - x^2/2$ rispettivamente, e tra di essi agisce una forza elastica di costante $k > 0$ (vedi Figura 2).

(a) Scrivere la lagrangiana del sistema usando come coordinate le ascisse x_1, x_2 dei due punti ed individuare le configurazioni di equilibrio;

(b) calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile e determinare i modi normali di oscillazione.

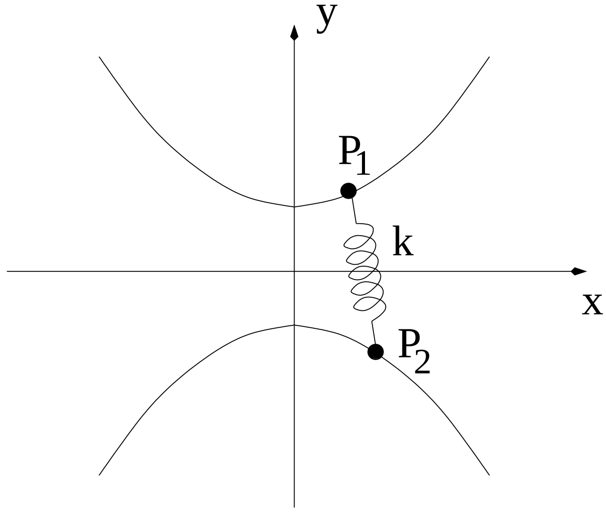

Figura 2

Prova al Calcolatore

(a) Indicata con $H(m, l, g, \omega, \phi, p)$ l'hamiltoniana del punto (3) del primo esercizio tracciare in un piano cartesiano $\phi,\ p$ le curve di livello

$$H(1,1,1,3/8,\phi,p) = 1/2,\ \ H(1,1,1,3/8,\phi,p) = 1,$$

$$H(1,1,1,3/8,\phi,p) = 3/2,$$

$$H(1,1,1,3/8,\phi,p) = -4,\ \ H(1,1,1,3/8,\phi,p) = -1$$

per $\phi \in (-\pi, \pi)$, $p \in (-5, 5)$. Usare l'opzione $grid = [200, 200]$

(b) Considerare la superfice di equazioni parametriche

$$x = u\cos(v),\ \ y = u\sin(v),\ \ z = u^2.$$

Calcolare l'area di questa superfice relativa al dominio di base

$$0 \le u \le 4,\ \ 0 \le v \le 2\pi\ .$$